ÜBER

EINIGE ANALYTISCH-GEOMETRISCHE

MAXIMA- UND MINIMA-PROBLEME.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

BEI

HOCHLÖBLICHER PHILOSOPHISCHER FACULTÄT ZU MARBURG

EINGEREICHT

VON

ANTON BÖRSCH

AUS

CASSEL.

MARBURG.

1876.

SEINEN

INNIGST GELIEBTEN ELTERN

GEWIDMET

VOM

VERFASSER.

EINLEITUNG.

Bei der Untersuchung der in eine gegebene Ellipse eingeschriebenen Polygone grössten Inhalts und der in ein Ellipsoid eingeschriebenen Polyeder grössten Volumens ist es von besonderem Nutzen, diese Probleme für das Dreieck und das Tetraeder durchgeführt zu haben. Die Behandlung der beiden letzten Aufgaben lässt sich nun, wenigstens in so fern es auf die Bestimmung der Coordinaten der Eckpunkte dieser geometrischen Gebilde ankommt, verallgemeinern, indem man die Ausdrücke für die Inhalte der Dreiecke oder Tetraeder gleichsam für den Raum von n Dimensionen erweitert und verlangt, dass die so definirte Funktion einer gewissen Anzahl von Variabeln ein Maximum werde, während gleichzeitig eine bestimmte Anzahl in gleicher Weise verallgemeinerter Bedingungsgleichungen unter den Veränderlichen bestehen, die denen analog sind, welche für die speziellen geometrischen Probleme gelten.

Es ist mir zwar nicht gelungen, dieses allgemeine Problem vollständig zu lösen, indem ich nur bis zur Aufstellung der definitiven einfachsten Gleichungen, und mit Hilfe dieser, ohne ihre Lösungen zu kennen, zur Bestimmung des Maximalwerthes der betreffenden Funktion gelangt bin. Weil jedoch hierdurch die Gleichungen, welche die Coordinaten der Eckpunkte der Dreiecke und Tetraeder grössten Inhalts erfüllen müssen, als spezielle Fälle des Allgemeinen auftreten, und weil ferner das allgemeine Problem, auch wenn es nicht vollständig gelöst ist, meines Erachtens manches Interessante bietet, so glaube ich berechtigt zu sein, es den geometrischen Betrachtungen vorausschicken zu dürfen.

Was nun diese letzteren anbetrifft, so hoffe ich, trotzdem dass in neuerer Zeit und besonders durch Herrn Fiedlers ausgezeichnete deutsche Bearbeitungen der Salmonschen Lehrbücher über analytische Geometrie die Untersuchungen über die Eigenschaften der Curven und Flächen zweiten Grades fast erschöpft zu sein scheinen, dennoch einiges Neue zu geben.

Durch eine im eben erwähnten Lehrbuche ohne Beweis angeführte Bemerkung*) darauf aufmerksam gemacht, dass für die einer Ellipse eingeschriebenen Dreiecke grössten Inhalts eben diese Ellipse die ihnen umschriebene kleinsten Inhalts ist, suchte ich

*) Vergl. Salmon, Theorie der Kegelschnitte art. 425 pag. 609.

allgemein die durch drei gegebene Punkte gehende Ellipse kleinsten Inhalts zu finden. Die im § 3 gegebene Lösung dieser Aufgabe habe ich durch die Anwendung von Trilinearcoordinaten gefunden, und sie hat zu einem sehr symetrischen Resultat geführt, welches zugleich zeigt, dass das Verhältniss zwischen eingeschriebenem Dreieck grössten und umschriebener Ellipse kleinsten Inhalts ein dualistisches ist. Die entsprechenden Untersuchungen habe ich sodann für Tetraeder und Ellipsoid ebenfalls durchgeführt.

Auch die im § 6 versuchte Definition der conjugirten Durchmesser des Ellipsoides als die Achsen der eingeschriebenen Octaeder oder Parallelopipeda grössten Inhalts und die daraus folgende Ableitung ihrer Haupteigenschaften habe ich in dieser Weise noch nicht vorgefunden.

---

§ 1.

Nach dem oben Gesagten gehe ich zunächst zur Behandlung der folgenden Aufgabe über:

Es soll die Determinante $(n+1)^{\text{ster}}$ Ordnung von $n(n+1)$ veränderlichen Grössen $x_{\varkappa\lambda}$ $\begin{pmatrix}\varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n\\ \lambda = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n\end{pmatrix}$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & x_{01} & x_{02} & \cdot & \cdot & x_{0n} \\ 1 & x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & x_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdot & \cdot & x_{nn} \end{vmatrix}$$

zu einem Maximum werden, wenn unter den Veränderlichen die $n+1$ Bedingungsgleichungen

$$p_{\varkappa\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{n} x_{\varkappa\lambda}^2 = 1 \quad (\varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

bestehen.

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, will ich festsetzen, dass, wenn in diesem Paragraphen die Buchstaben $\varkappa$, λ, μ, ν als Summations- oder Collectivbuchstaben vorkommen, $\varkappa$ und μ die Werthe 0, 1, 2, . . n, λ und ν dagegen die Werthe 1, 2, . . n erhalten sollen.

Nach den allgemeinen Regeln der Theorie der Maxima nnd Minima habe ich bei der Behandlung des Problems zuvörderst eine Funktion

$$\phi = \triangle + \frac{1}{2}\sum_{\varkappa} \varepsilon_{\varkappa}\,(p_{\varkappa\varkappa} - 1)$$

zu bilden, wo die $\varepsilon_{\varkappa}$ noch zu bestimmende Grössen bedeuten.

Es sind sodann die nothwendigen Gleichungen, welche die $x_{\varkappa\lambda}$ und $\varepsilon_\varkappa$ erfüllen müssen:

$$\frac{d\phi}{dx_{\varkappa\lambda}} = 0; \quad p_{\varkappa\varkappa} - 1 = 0 \tag{1}$$

Bezeichnen wir nun die Unterdeterminanten n^{ter} Ordnung von $\triangle$ mit $s_{\varkappa\mu}$, so haben die Gleichungen (1) die Gestalt:

$$\begin{array}{l}
s_{01} + \varepsilon_0 x_{01} = 0;\ s_{11} + \varepsilon_1 x_{11} = 0;\ \ldots\ s_{n1} + \varepsilon_n x_{n1} = 0 \\
s_{02} + \varepsilon_0 x_{02} = 0;\ s_{12} + \varepsilon_1 x_{12} = 0;\ \ldots\ s_{n2} + \varepsilon_n x_{n2} = 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
s_{0n} + \varepsilon_0 x_{0n} = 0;\ s_{1n} + \varepsilon_1 x_{1n} = 0;\ \ldots\ s_{nn} + \varepsilon_n x_{nn} = 0 \\
x_{01}^2 + x_{02}^2 + \ldots + x_{0n}^2 = 1 \\
x_{11}^2 + x_{12}^2 + \ldots + x_{1n}^2 = 1 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + \ldots + x_{nn}^2 = 1
\end{array} \tag{2}$$

Es ist nun

$$\triangle = \sum_\varkappa s_{\varkappa 0} = \sum_\varkappa x_{\varkappa\lambda}\, s_{\varkappa\lambda}$$

Da aber eine Determinante verschwindet, wenn in ihr die Elemente einer Reihe denen einer andern parallelen Reihe gleich werden, so erhalten wir, wenn wir in $\triangle$ nach und nach die Elemente jeder Colonne denen der ersten Colonne gleich, also sämmtlich gleich 1, setzen, die $n+1$ identischen Gleichungen:

$$\sum_\varkappa s_{\varkappa\mu} = \begin{cases} \triangle & (\mu = 0) \\ 0 & (\mu = 1, 2, \ldots n) \end{cases} \tag{3}$$

Addire ich nun von den Gleichungen (2) jedesmal die, welche in einer Horizontalreihe stehen, so folgen mit Berücksichtigung von (3) zur Bestimmung der $n+1$ Grössen $\varepsilon_\varkappa$ die n homogenen linearen Gleichungen:

$$\sum_\varkappa \varepsilon_\varkappa\, x_{\varkappa\lambda} = 0 \tag{4}$$

woraus sich ergiebt:

$$\varepsilon_\varkappa = \rho\, s_{\varkappa 0} \tag{5}$$

wenn ρ wieder eine noch zu bestimmende Grösse bedeutet.

Setzen wir diese Werthe (5) in die Gleichungen (2) ein, fügen als erste Reihe die $n+1$ identischen Gleichungen

$$s_{00} - s_{00} = 0;\ s_{10} - s_{10} = 0;\ \ldots\ s_{n0} - s_{n0} = 0$$

hinzu, multipliciren sodann die sämmtlichen Gleichungen der so entstehenden Vertical-

reihen nach und nach mit den entsprechenden Gliedern der sämmtlichen Verticalreihen des Systems

$$\begin{matrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ x_{01} & x_{11} & . & . & x_{n1} \\ . & . & . & . & . \\ x_{0n} & x_{1n} & . & . & x_{nn} \end{matrix}$$

und addiren schliesslich die daraus hervorgegangenen Vertikalreihen, so ergiebt sich, wenn wir die Bezeichnung

$$p_{\varkappa\mu} = \sum_{\lambda} x_{\varkappa\lambda}\, x_{\mu\lambda} = p_{\mu\varkappa} \quad (\varkappa \gtrless \mu)$$

einführen, das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\triangle + (\rho - 1)\, s_{00} = 0;\ (\rho p_{10} - 1)\, s_{10} = 0;\ \ldots\ (\rho p_{n0} - 1)\, s_{n0} = 0 \\ &(\rho\, p_{01} - 1)\, s_{00} = 0;\ \triangle + (\rho - 1)\, s_{10} = 0;\ \ldots\ (\rho p_{n1} - 1)\, s_{n_0} = 0 \\ &\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ &(\rho\, p_{0n} - 1)\, s_{00} = 0;\ (\rho p_{1n} - 1)\, s_{10} = 0;\ \ldots\ \triangle + (\rho - 1)\, s_{n0} = 0 \end{aligned}$$

Addiren wir nun die $n + 1$ Gleichungen der Diagonale dieses Systems, so erhalten wir:

$$(n+1)\ \triangle + (\rho - 1)\{s_{00} + s_{10} + \ldots + s_{n0}\} = 0$$

oder

$$(n+1)\ \triangle + (\rho - 1)\ \triangle = 0$$

Da aber $\triangle$ in unserer Aufgabe sicher von Null verschieden ist, so folgt:

$$\rho = -n$$

und hieraus:

$$s_{00} = s_{10} = s_{20} = \ldots = s_{n0} = \frac{\triangle}{n+1} \tag{6}$$

Da also auch diese Grössen von Null verschieden sind, so erhalten wir das definitive Gleichungssystem:

$$p_{\varkappa\mu} = \begin{cases} 1 & (\varkappa = \mu) \\ -\frac{1}{n} & (\varkappa < \mu) \end{cases}$$

oder

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda} x^2_{0\lambda} = 1;\ \sum_{\lambda} x_{0\lambda}\, x_{1\lambda} = -\tfrac{1}{n};\ \ldots\ \sum_{\lambda} x_{0\lambda}\, x_{n\lambda} = -\tfrac{1}{n} \\ &\sum_{\lambda} x^2_{1\lambda} = 1;\ \ldots\ \sum_{\lambda} x_{1\lambda}\, x_{n\lambda} = -\tfrac{1}{n} \\ &\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ &\sum_{\lambda} x^2_{n\lambda} = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Dies sind $\frac{(n+1)\ (n+2)}{2}$ Gleichungen zwischen $n\ (n+1)$ Unbekannten. Doch sind diese Gleichungen, welche viele Aehnlichkeit mit denen der orthogonalen Substitution haben, nicht alle von einander unabhängig, vielmehr ist eine die Folge aller übrigen. Denn die letzte Gleichung $p_{nn} = 1$ folgt z. B. aus allen vorhergehenden, wie sich durch die nachstehende Betrachtung ergiebt.

Schliesse ich nämlich von den Gleichungen (7) die letzte aus, so folgen aus den übrigen die Relationen:

$$\sum_{\lambda} p_{\delta\lambda} = 0 \quad (\delta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1)$$

oder

$$\sum_{\lambda} \left\{ x_{\delta\lambda} \sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} \right\} = 0$$

Da aber die Determinante dieses Systems

$$\begin{vmatrix} x_{01} & x_{02} & \ldots & x_{0n} \\ x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \ldots & x_{n-1,n} \end{vmatrix} = (-1)^n s_{n0} = (-1)^n \frac{\triangle}{n+1}$$

nach (6) von Null verschieden ist, so ergeben sich für die $x_{\varkappa\lambda}$ ferner die folgenden n Gleichungen:

$$\sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} = 0 \tag{8}$$

Diese Gleichungen ergeben sich zwar ebenso einfach aus dem System (4), allein hier mussten wir sie aus (7) ohne Benutzung der letzten Gleichung ableiten.

Quadriren und addiren wir nun die Gleichungen (8), so folgt wieder mit Benutzung von (7), wenn man die letzte dieser Gleichungen ausschliesst, gerade diese letzte:

$$p_{nn} = 1$$

Da also von den $\frac{(n+1)\ (n+2)}{2}$ Gleichungen (7) Eine eine Folge der andern ist, so muss sich jede der $n\ (n+1)$ Unbekannten als Funktion von

$$n\ (n+1) - \frac{(n+1)\ (n+2)}{2} + 1 = \frac{n\ (n-1)}{2}$$

willkürlichen Grössen darstellen lassen.

Ob dies auf rationale Weise geschehen kann, lässt sich noch nicht übersehen, denn bis jetzt ist es mir nur in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$, welche bestimmten geometrischen Aufgaben entsprechen, gelungen, die gesuchten Grössen durch einen resp. drei willkürliche Parameter rational auszudrücken.

Die Gleichungen (7) reichen jedoch, ohne dass man ihre Lösungen zu kennen braucht, schon aus, um den Maximalwerth von $\triangle$ zu bestimmen und um zu zeigen, dass sie auch zur Lösung des Problems hinreichend sind, so dass man die Untersuchung der zweiten Differentialquotienten von $\triangle$ unterlassen kann.

Es ergiebt sich nämlich aus dem Multiplicationstheorem der Determinanten und mit Benutzung von (7):

$$\triangle^2 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{n-1}{n} & . & . & \frac{n-1}{n} \\ \frac{n-1}{n} & 2 & . & . & \frac{n-1}{n} \\ . & . & . & . & . \\ \frac{n-1}{n} & \frac{n-1}{n} & . & . & 2 \end{vmatrix}$$

Um den Werth dieser Determinante zu finden, untersuchen wir die allgemeinere $(n+1)^{\text{ster}}$ Ordnung:

$$D = \begin{vmatrix} x & y & y & . & . & y \\ y & x & y & . & . & y \\ . & . & . & . & . & . \\ y & y & y & . & . & x \end{vmatrix}$$

Der Ausdruck von D als Funktion von x und y bestimmt sich nun durch Anwendung bekannter Determinantensätze in folgender Weise:

$$D = (x-y)^n \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & x+ny \\ -1 & +1 & 0 & . & . & 0 & y \\ 0 & -1 & +1 & . & . & 0 & y \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -1 & x \end{vmatrix} = (x-y)^n (x+ny) \begin{vmatrix} -1 & +1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & +1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -1 \end{vmatrix} (-1)^n$$

und hieraus endlich:

$$D = (x-y)^n (x+ny)$$

Setzen wir nun

$$x = 2\,;\; y = \frac{n-1}{n}$$

so erhalten wir:

$$\triangle = \pm \sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}$$

Also für alle Werthsysteme der $x_{\varkappa\lambda}$, welche die Gleichungen (7) befriedigen, erhält $\triangle$ diesen constanten Wurzelwerth, und zwar giebt der positive Werth der Quadratwurzel das Maximum und der negative das Minimum von $\triangle$ an.

Sollte sich nun für das Werthsystem der $x_{\varkappa\lambda}$, welches man direct durch Lösung der Gleichungen (7) erhält, der Minimalwerth ergeben, so braucht man nur den $x_{\varkappa\lambda}$ einer Colonne das entgegengesetzte Zeichen zu geben, um den grössten Werth zu erhalten; denn $\triangle$ wechselt sein Zeichen, wenn man den Elementen einer ungeraden Anzahl von Colonnen das entgegengesetzte Zeichen giebt, während die Gleichungen (7) unverändert bestehen bleiben.

Statt der Gleichungen (7) lässt sich nun noch ein anderes System von $\frac{n(n+3)}{2}$

unabhängigen fast ebenso einfachen Gleichungen aufstelleu, von denen wir später auch Gebrauch zu machen haben.

Es ist nämlich nach (2), (5) und (6):

$$s_{\varkappa\mu} = \begin{cases} \dfrac{\triangle}{n+1} & (\mu = 0) \\ \dfrac{n}{n+1} \triangle x_{\varkappa\mu} & (\mu = 1, 2, \ldots n) \end{cases}$$

Nun bestehen die Gleichungen

$$\triangle = \sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} s_{\varkappa\lambda}$$

und daher auch

$$\triangle = \frac{n}{n+1} \triangle \sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda}^2$$

also folgt:

$$\sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda}^2 = \frac{n+1}{n} \tag{9}$$

Ferner ist:

$$\sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} s_{\varkappa\nu} = 0 \quad (\lambda \gtrless \nu)$$

$$\frac{n}{n+1} \triangle \sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} x_{\varkappa\nu} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\sum_{\varkappa} x_{\varkappa\lambda} x_{\varkappa\nu} = 0 \quad (\lambda < \nu) \tag{10}$$

Endlich folgt, wenn ich die Gleichungen (8) quadrire, mit Benutzung von (9):

$$\sum_{\varkappa,\mu} x_{\varkappa\lambda} x_{\mu\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \quad (\varkappa < \mu) \tag{11}$$

Diese Gleichungen (9), (10) und (11) bilden wieder ein System von $\frac{n(n+3)}{2}$ von einander unabhängigen Gleichungen, welches mit dem System (7) äquivalent ist.

Wie oben erwähnt, haben die definitiven Gleichungen (7) eine gewisse Aehnlichkeit mit denen der orthogonalen Substitution. Ich will hier noch kurz anführen, wie dies zu verstehen ist.

Habe ich eine Funktion von $n+1$ Veränderlichen $x_0, x_1 \ldots x_n$ und mache ich die homogene lineare Substitution

$$x_{\varkappa} = \sum_{\mu} a_{\varkappa\mu} y_{\mu}$$

so nennt man bekanntlich diese Substitution eine orthogonale, wenn

$$\sum_{\varkappa} x_{\varkappa}^2 = \sum_{\varkappa} y_{\varkappa}^2$$

werden soll. In Folge dieser Bedingung müssen zwischen den Coefficienten $a_{\varkappa\mu}$ die Gleichungen bestehen:

$$\sum_{\mu} a_{\varkappa\mu}^2 = 1; \quad \sum_{\rho=0}^{n} a_{\varkappa\rho}\, a_{\mu\rho} = 0 \quad (\varkappa \gtrless \mu)$$

und die Substitutionsdeterminante hat den Werth:

$$\sum \pm a_{00}\, a_{11} \ldots a_{nn} = \pm 1$$

Die $a_{\varkappa\mu}$ müssen also $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gleichungen erfüllen und es muss sich demnach jedes durch $\frac{n(n+1)}{2}$ willkürliche Grössen ausdrücken lassen. Und in der That ist es Cayley gelungen, die $a_{\varkappa\mu}$ als rationale Funktionen von $\frac{n(n+1)}{2}$ Parametern darzustellen.

Mache ich jetzt dagegen die speciellere Substitution

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0 + y_1 + \ldots + y_n \\ x_1 &= b_{01}\, y_0 + b_{11}\, y_1 + \ldots + b_{n1}\, y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= b_{0n}\, y_0 + b_{1n}\, y_1 + \ldots + b_{nn}\, y_n \end{aligned}$$

und bestimme:

$$\sum_{\varkappa} x_\varkappa^2 = 2 \sum_{\varkappa} y_\varkappa^2 + \frac{n-1}{n} \sum_{\varkappa,\mu\ (\varkappa \gtrless \mu)} y_\varkappa\, y_\mu$$

so erhalten wir genau unsere Gleichungen (7) als Bedingungsgleichungen für die $b_{\varkappa\lambda}$.

Will ich nun die zweite Form in die erste zurücktransformiren, so muss ich setzen:

$$y_\varkappa = \frac{1}{n+1} x_0 + \frac{n}{n+1} b_{\varkappa 1}\, x_1 + \ldots + \frac{n}{n+1} b_{\varkappa n}\, x_n$$

zufolge der Relation:

$$y_\varkappa = \frac{1}{n+1}\left(y_0 + y_1 + \ldots + y_n\right) + \frac{n}{n+1}\left(b_{01}\, y_0 + b_{11}\, y_1 + \ldots + b_{n1}\, y_n\right) b_{\varkappa 1} + \ldots$$

$$+ \frac{n}{n+1}\left(b_{0n}\, y_0 + b_{1n}\, y_1 + \ldots + b_{nn}\, y_n\right) b_{\varkappa n}$$

oder

$$y_\varkappa = y_0 \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\left(b_{01}\, b_{\varkappa 1} + b_{02}\, b_{\varkappa 2} + \ldots + b_{0n}\, b_{\varkappa n}\right)\right\} + \ldots$$

$$+ y_n \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\left(b_{n1}\, b_{\varkappa 1} + b_{n2}\, b_{\varkappa 2} + \ldots + b_{nn}\, b_{\varkappa n}\right)\right\}$$

§ 2.

Die im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate wollen wir nun bei der Lösung zweier geometrischer Aufgaben anwenden, die auf die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ zurückführen und eine vollständige Lösung zulassen.

Es sollen nämlich

I. Die in eine gegebene Ellipse eingeschriebenen Dreiecke grössten Inhalts, und

II. Die in ein gegebenes Ellipsoid eingeschriebenen Tetraeder grössten Volumens gefunden und nach ihren Eigenschaften näher untersucht werden.

Wir gehen zunächst auf die erste Aufgabe genauer ein.

Die Gleichung der Ellipse sei in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben. Die rechtwinklichen Coordinaten dreier Punkte der Ellipse seien $x_1\, y_1, x_2\, y_2, x_3\, y_3$, dann ist bekanntlich der Inhalt des durch sie bestimmten Dreiecks:

$$J = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\, D$$

J oder D soll nun ein Maximum werden, wenn die Bedingungsgleichungen

$$\frac{x_\varkappa^2}{a^2} + \frac{y_\varkappa^2}{b^2} = 1 \quad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

bestehen. Mache ich nun die Substitution

$$x = a\lambda; \quad y = b\mu$$

und nenne λ_1, μ_1 . . die zu x_1, y_1 . . . gehörigen Werthe von λ, μ, so erhalten wir:

$$J = \frac{1}{2}\, ab \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \mu_1 \\ 1 & \lambda_2 & \mu_2 \\ 1 & \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\, ab\, \triangle$$

und die Bedingungsgleichungen gehen über in:

$$\lambda_\varkappa^2 + \mu_\varkappa^2 = 1$$

Dadurch ist die Aufgabe genau auf die im § 1 behandelte Aufgabe für den Fall $n = 2$ zurückgeführt, und wir erhalten demnach als Maximalwerth von J den Ausdruck:

$$J = \frac{3}{4}\, ab\, \sqrt{3}$$

und zur Bestimmung der Werthe von $\lambda_\varkappa$, $\mu_\varkappa$ die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2 + \mu_1^2 = 1;\ \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = -\frac{1}{2};\ \lambda_1\lambda_3 + \mu_1\mu_3 = -\frac{1}{2} \\ (1) \qquad &\lambda_2^2 + \mu_2^2 = 1;\ \lambda_2\lambda_3 + \mu_2\mu_3 = -\frac{1}{2} \\ &\lambda_3^2 + \mu_3^2 = 1 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen erlauben mir, die λ_1, μ_1 . . als die Richtungscosinus dreier Strecken anzusehen, von denen je zwei den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ mit einander bilden, und nach den früheren Entwickelungen werden sich die Unbekannten durch eine willkürliche Grösse ausdrücken lassen, so dass es also eine einfach unendliche Schaar in eine Ellipse eingeschriebener Dreiecke mit dem constanten grössten Inhalt $\frac{3}{4}$ ab $\sqrt{3}$ giebt.

Die Gleichungen (1) stellen eigentlich nur die Bedingungen dar, welche die Coordinaten der Eckpunkte der in einen Kreis mit dem Radius 1 eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecke erfüllen müssen, und hieraus könnte man unmittelbar die Werthe für die $\lambda_\varkappa, \mu_\varkappa$ ermitteln.

Um jedoch die Lösung der Gleichungen (1) auch ohne Benutzung dieser geometrischen Anschauung zn erhalten, führe ich folgende Substitutionen ein:

$$z_1 = \lambda_1 + i\mu_1;\ z_2 = \lambda_2 + i\mu_2;\ z_3 = \lambda_3 + i\mu_3$$
$$z'_1 = \lambda_1 - i\mu_1;\ z'_2 = \lambda_2 - i\mu_2;\ z'_3 = \lambda_3 - i\mu_3$$

wobei i, wie gewöhnlich, $\sqrt{-1}$ bedeutet.

Hieraus ergiebt sich mit Benutzung der für die $\lambda_\varkappa, \mu_\varkappa$ bestehenden Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{array}{lll} \alpha)\ z_1 z'_1 = 1 & ;\ \beta)\ z_2 z'_2 = 1 & ;\ \gamma)\ z_3 z'_3 = 1 \\ \alpha')\ z_1 z'_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} & ;\ \beta')\ z_2 z'_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}} & ;\ \gamma')\ z_3 z'_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ \alpha'')\ z_1 z'_3 = e^{-\frac{2\pi i}{3}} & ;\ \beta'')\ z_2 z'_1 = e^{-\frac{2\pi i}{3}} & ;\ \gamma'')\ z_3 z'_2 = e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{array}$$

Bilde ich nun $\alpha) + \gamma') + \beta'')$, so bekommt man, da z'_1 von Null verschieden ist:

$$(3)\qquad z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

Ferner erhalte ich aus $\alpha) . \beta) + \beta'') . \gamma'') + \gamma') . \alpha')$:

$$(4)\qquad z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$$

Und endlich ist

$$(z_1 z_2 z_3)\ (z'_1 z'_2 z'_3) = 1$$

und da $(z_1 z_2 z_3)$ und $(z'_1 z'_2 z'_3)$ conjugirt complexe Grössen sind, so muss $(z_1 z_2 z_3)$ den absoluten Betrag 1 haben, so dass wir setzen können:

$$(5)\qquad z_1 z_2 z_3 = e^{\phi i}$$

wenn ϕ eine beliebige Grösse ist.

Die Ausdrücke (3), (4), (5) sind aber die Coefficienten einer Gleichung dritten Grades, deren Wurzeln z_1, z_2, z_3 sind, und welche die Gestalt hat:

$$x^3 - e^{\phi i} = 0$$

Ihre Wurzeln sind aber:

$$z_1 = e^{\frac{\phi i}{3}}\ ;\ z_2 = e^{\frac{\phi + 2\pi}{3} i}\ ;\ z_3 = e^{\frac{\phi - 2\pi}{3} i}$$

Hiernach findet man sofort:

$$z'_1 = e^{-\frac{\phi i}{3}} \quad ; \quad z'_2 = e^{-\frac{\phi + 2\pi}{3} i} \quad ; \quad z'_3 = e^{-\frac{\phi - 2\pi}{3} i}$$

und man erhält schliesslich:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \cos\frac{\phi}{3}\,;\ \lambda_2 = \cos\frac{\phi+2\pi}{3}\,;\ \lambda_3 = \cos\frac{\phi-2\pi}{3} \\ \mu_1 &= \sin\frac{\phi}{3}\,;\ \mu_2 = \sin\frac{\phi+2\pi}{3}\,;\ \mu_3 = \sin\frac{\phi-2\pi}{3} \end{aligned}$$

Setzt man nun wieder $x = a\lambda$, $y = b\mu$, so bekommt man die Coordinaten der Eckpunkte der Dreiecke grössten Inhalts, wenn man ϕ statt $\frac{\phi}{3}$ schreibt und $tg\frac{\phi}{2} = t$ setzt, in folgender Weise durch die willkürliche Grösse t rational ausgedrückt:

(7)

$$x_1 = a\cos\phi = a\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad y_1 = b\sin\phi = b\frac{2t}{1+t^2}$$

$$x_2 = a\cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{a}{2}\frac{-(1-t^2) - 2\sqrt{3}t}{1+t^2} \quad ; \quad y_2 = b\sin\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{b}{2}\frac{-2t + \sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2}$$

$$x_3 = a\cos\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{a}{2}\frac{-(1-t^2) + 2\sqrt{3}t}{1+t^2} \quad ; \quad y_3 = b\sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{b}{2}\frac{-2t - \sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2}$$

Dass die in (6) gefundenen Werthe der $\lambda_\varkappa$, $\mu_\varkappa$ wirklich einem Maximum von $\triangle$ entsprechen, findet man zwar schon durch einfache Ausrechnung, doch soll auch hierfür noch ein Beweis geliefert werden.

Zu dem Ende stelle ich $\triangle$ zunächst in etwas anderer Form dar. Durch einige leichte Umformungen findet man nämlich:

$$\triangle = \frac{i}{2}\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z'_1 \\ 1 & z_2 & z'_2 \\ 1 & z_3 & z'_3 \end{vmatrix}$$

Sollen nun die gefundenen Werthe der $\lambda_\varkappa$, $\mu_\varkappa$ oder der $z_\varkappa$, $z'_\varkappa$ einem Maximum von $\triangle$ entsprechen, so muss, wenn man die Grössen $\frac{\phi}{3}$, $\frac{\phi+2\pi}{3}$, $\frac{\phi-2\pi}{3}$ um drei beliebige Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ vermehrt und sodann $\triangle$ nach Potenzen der $\varepsilon_\varkappa$ entwickelt

I. das constante Glied den Werth $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ haben,

II. das Glied erster Ordnung identisch verschwinden, und

III. das Glied zweiter Ordnung eine negative definite Form sein.

In der That findet man, dass die Bedingungen I. und II. wirklich erfüllt sind, und die Glieder zweiter Ordnung die Gestalt haben:

$$-\frac{1}{4}\sqrt{3}\left\{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2\right\}$$

Dies ist eine wesentlich negative Grösse, welche nur für das Werthsystem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ verschwindet. Dieser Fall bedeutet aber nichts anderes, als dass wir die willkürliche Grösse ϕ um 3ε vermehren, und er hat also keinen Einfluss.

Die in (7) angegebenen Werthe der $x_\varkappa$, $y_\varkappa$ ergeben auch eine einfache geometrische Construction der Dreiecke grössten Inhalts.

Ich beschreibe nämlich mit der halben grossen Achse als Radius um den Mittelpunkt der Ellipse einen Kreis, ziehe sodann unter einem beliebigen Winkel ϕ gegen die grosse Achse einen Radius, und dazu die beiden andern, welche mit ihm die beiden Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ bilden, fälle sodann von den drei Durchschnittspunkten der Radien mit dem Kreis auf die x-Achse Perpendikel, so sind die Durchschnittspunkte dieser mit der Ellipse die Eckpunkte des Dreiecks grössten Inhalts, welches zu dem gewählten Werth von ϕ gehört.

Da also die Dreiecke grössten Inhalts durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte jetzt vollständig bestimmt sind, so will ich ihre Eigenschaften noch etwas näher untersuchen.

I. Unter den Dreiecken grössten Inhalts die grössten Umfanges aufzufinden.

Bedeutet U den Umfang eines dieser Dreiecke, so ist:

$$U = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} + \sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2} + \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$$

Setze ich für die $x_\varkappa$, $y_\varkappa$ die oben gefundenen Funktionen von ϕ ein und bilde

$$\frac{dU}{d\phi} = 0 \tag{8}$$

so geben die Werthe von ϕ, die dieser Gleichung genügen, die Werthe, für welche U ein Maximum oder Minimum wird, je nachdem $\frac{d^2U}{d\phi^2}$ negativ oder positiv ist.

Bilde ich nun die Gleichung (8) und mache sie rational, so erhalte ich eine Gleichung achten Grades für $cos^2\,\phi$, welche, wie sofort ersichtlich, durch die Werthe

$$\phi = 0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$$

befriedigt wird, und zwar ergeben diese Werthe folgende Maximalwerthe für U:

$$U_1 = \sqrt{9a^2+3b^2} + b\sqrt{3} \quad \left(\phi = 0,\ \frac{\pi}{3}\right)$$

$$U_2 = \sqrt{3a^2+9b^2} + a\sqrt{3} \quad \left(\phi = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

welche den vier gleichschenklichen Dreiecken der Schaar entsprechen, deren Spitzen in den Scheiteln der Ellipse liegen.

Es bleibt dann noch eine Gleichung vierten Grades für $cos^2\,\phi$ übrig, deren Wurzeln nach der Natur der Aufgabe reell sein müssen, und die Werthe von ϕ geben, wofür U ein Minimum wird.

II. Der Mittelpunkt der Ellipse ist der Schwerpunkt sämmtlicher Dreiecke grössten Inhalts.

Es sind nämlich die Coordinaten des Schwerpunkts:

$$\xi = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = a\,\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{3};\quad \eta = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = b\,\frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{3}$$

Nun ist

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0;\quad \mu_1+\mu_2+\mu_3 = 0$$

und daher:

$$\xi = 0;\quad \eta = 0$$

Dies kann man auch in folgender Weise ausdrücken:

Die Verbindungslinien der Ecken der Dreiecke grössten Inhalts mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten schneiden sich im Mittelpunkt der Ellipse, und die vom Mittelpunkt nach den Eckpunkten gezogenen Radien theilen sowohl die Fläche der Dreiecke grössten Inhalts als die der Ellipse selbst in drei gleiche Theile.

III. Die Enveloppe der Seiten der Dreiecke grössten Inhalts zu finden.

Da jede der Seiten, wenn ϕ von o bis 2π wächst, dieselben Lagen durchläuft nur von einer andern Anfangslage aus, so haben die drei Seiten ein und dieselbe Curve zur Enveloppe und zwar findet man für sie die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{4} \tag{9}$$

Also die Enveloppe ist eine der gegebenen Ellipse ähnliche, deren halbe Hauptachsen halb so gross als die gegebenen sind.

Ferner tangiren die Mitten der Seiten der Dreiecke grössten Inhalts die Ellipse (9) in den Eckpunkten der dieser Ellipse eingeschriebenen Dreiecke grössten Inhalts, so dass die Seiten der entsprechenden Dreiecke dieser beiden Schaaren einander parallel sind.

Ebenso beschreiben alle andern Punkte der Dreiecke grössten Inhalts, deren Lage gegen die drei Ecken oder Seiten eine bestimmte ist, wie der Mittelpunkt des ein- und umschriebenen Kreises, der Durchschnittspunkt der Höhen u. s. w. der gegebenen Ellipse ähnliche Ellipsen.

IV. Die Tangenten, welche in den Eckpunkten der Dreiecke grössten Inhalts an die Ellipse gezogen werden, sind den gegenüberliegenden Seiten dieser Dreiecke parallel.

Denn die durch $x_1\, y_1$ gehende Tangente und die gegenüberliegende Seite haben z. B. die Gleichungen:

$$\frac{\cos\phi}{a}\, x + \frac{\sin\phi}{b}\, y - 1 = 0$$

$$\frac{\cos\phi}{a}\, x + \frac{\sin\phi}{b}\, y + \frac{1}{2} = 0$$

Da nun die Coefficienten von x und y in beiden einander gleich sind, so sind die durch sie dargestellten Geraden einander parallel.

V. Die Enveloppe der Höhen der Dreiecke grössten Inhalts ist die Evolute der Ellipse.

Denn da nach IV. die Tangenten in den Eckpunkten den gegenüberliegenden Seiten parallel sind, so sind die Höhen Normalen der Ellipse und die Enveloppe dieser ist bekanntlich die Evolute. Analytisch ergiebt sich dies folgendermaassen. Es ist die Gleichung der durch $x_1\, y_1$ gehenden und zu der gegenüberliegenden Seite normalen Geraden:

$$N = a \sin\phi\, x - b \cos\phi\, y - (a^2 - b^2) \sin\phi \cos\phi = 0$$

Eliminirt man aus $N = 0$ und $\frac{dN}{d\phi} = 0$ das ϕ, so erhält man:

$$(a\,x)^{\frac{2}{3}} + (b\,y)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

und dies ist die Gleichung der Evolute.

VI. Die Höhen der Dreiecke grössten Inhalts verhalten sich zu einander, wie die Abstände der drei Seiten vom Mittelpunkt der Ellipse, und beide wie die reciproken Werthe der Halbdurchmesser, welche zu den durch die Ecken gehenden Durchmessern conjugirt sind.

Denn es ist

$$h_1 = \frac{3}{2}\ \text{ab}\ \frac{1}{\sqrt{\text{a}^2 \sin^2\phi + b^2\cos^2\phi}} = \frac{3}{2}\ \frac{\text{ab}}{b_1}\ \text{u. s. w.}$$

und daher:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{b_1} : \frac{1}{b_2} : \frac{1}{b_3}$$

Ferner ist die Gleichung der durch $x_2\, y_2$ und $x_3\, y_3$ gehenden Geraden

$$\acute{a}\cos\phi\, x + \acute{b}\sin\phi\, y + \frac{1}{2}\ \text{ab} = 0$$

und daher ist ihr Abstand vom Mittelpunkt:

$$p_1 = \frac{1}{2}\ \frac{\text{ab}}{\sqrt{a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi}} = \frac{1}{2}\ \frac{\text{ab}}{b_1}\ \text{u. s. w. folglich:}$$

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{b_1} : \frac{1}{b_2} : \frac{1}{b_3} = h_1 : h_2 : h_3$$

Hiernach verhält sich auch jede Höhe zum Abstand der entsprechenden Seite wie 3 : 1; denn es ergiebt sich:

$$\frac{h_1}{p_1} = \frac{h_2}{p_2} = \frac{h_3}{p_3} = 3$$

VII. Die jedem Dreiecke der Schaar umschriebene Ellipse kleinsten Inhalts ist die allen gemeinschaftliche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und ebenso ist die allen Dreiecken grössten Inhalts eingeschriebene Ellipse grössten Inhalts die allen gemeinschaftliche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{4}$$

Denn die einem gleichseitigen Dreieck umschriebene Ellipse kleinsten Inhalts ist der Kreis*, und dies Verhältniss bleibt für die daraus durch Projection entstandenen Dreiecke und Ellipsen bestehen.

Allgemein werde ich dieses Problem im folgenden Paragraphen behandeln.

Das über die Dreiecke grössten Inhalts Gesagte lässt sich nun in folgender Weise noch verallgemeinern, indem man sich die Aufgabe stellt:

Die in eine gegebene Ellipse eingeschriebenen n-Ecke grössten Inhalts zu finden.

Sind $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$, . . . $x_n\, y_n$ die Coordinaten von n auf der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

---

* Vergl. Salmon, Theorie der Kegelschnitte art. 425 pag. 609.

gelegenen Punkten, so ist der doppelte Inhalt des durch sie bestimmten n-Ecks:

$$2\,J = (x_1\,y_2 - x_2\,y_1) + (x_2\,y_3 - x_3\,y_2) + \ . \ . \ + (x_n\,y_1 - x_1\,y_n)$$

Setze ich wieder

$$x_i = a\,\lambda_i \ ; \ y_i = b\,\mu_i \quad (i = 1, 2, \ . \ . \ n)$$

so reducirt sich die Aufgabe darauf, die in einen Kreis mit dem Radius 1 eingeschriebenen n-Ecke grössten Inhalts zu finden.

Bilde ich nun die Funktion

$$\psi = \frac{2\,J}{ab} + \frac{\delta_1}{2}(\lambda_1^2 + \mu_1^2 - 1) + \ . \ . \ + \frac{\delta_n}{2}(\lambda_n^2 + \mu_n^2 - 1)$$

so erhalte ich zur Bestimmung der Coordinaten der n Eckpunkte und der n Grössen δ_i ausser den Bedingungsgleichungen

$$\lambda_i^2 + \mu_i^2 = 1$$

noch die 2 n Gleichungen

$$\frac{d\,\psi}{d\lambda_i} = -\mu_{i-1} + \mu_{i+1} + \delta_i\,\lambda_i \ ; \quad \frac{d\,\psi}{d\mu_i} = \lambda_{i-1} - \lambda_{i+1} + \delta_i\,\mu_i$$

wenn man in den Fällen $i = 1$ und $i = n$ auf den rechten Seiten $\mu_n, \mu_1, \lambda_n, \lambda_1$ statt der dann auftretenden $\mu_0, \mu_{n+1}, \lambda_0, \lambda_{n+1}$ setzt.

Hieraus folgen nach Elimination der δ_i die n Gleichungen:

$$\lambda_i\,\lambda_{i+1} + \mu_i\,\mu_{i+1} - (\lambda_{i-1}\,\lambda_i + \mu_{i-1}\,\mu_i) = 0$$

Da die Summe dieser Gleichungen verschwindet, so ist eine die Folge der andern, und es bleiben also für die $2n$ Grössen λ_i, μ_i $2n-1$ unabhängige Gleichungen zu erfüllen. Diese werden aber durch das Werthsystem

$$\lambda_i = \cos\left(\phi + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) \ ; \quad \mu_i = \sin\left(\phi + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right)$$

befriedigt. Hieraus folgt, wie vorauszusehen, dass die einem Kreis mit dem Radius 1 eingeschriebenen n-Ecke grössten Inhalts die regelmässigen n-Ecke sind, deren Inhalt

$$J' = \frac{n}{2}\,\sin\frac{2\pi}{n}$$

beträgt. Die Coordinaten der in die Ellipse eingeschriebenen n-Ecke grössten Inhalts sind sodann:

$$x_i = a\,\cos\left(\phi + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right) \ ; \quad y_i = b\,\sin\left(\phi + (i-1)\frac{2\pi}{n}\right)$$

und ihr Inhalt ist:

$$J = \frac{n}{2}\,ab\,\sin\frac{2\pi}{n}$$

Die Construktion dieser Eckpunkte ist genau analog der für die Dreiecke grössten Inhalts angegebenen.

Es gilt hier ebenfalls der Satz, dass der Schwerpunkt dieser n-Ecke grössten Inhalts im Mittelpunkt der Ellipse liegt; denn es ist

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdot\cdot + x_n}{n} = 0\,; \qquad \frac{y_1 + y_2 + \cdot\cdot + y_n}{n} = 0$$

in Folge der Relationen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos i\,\frac{2\pi}{n} = 0\,; \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \sin i\,\frac{2\pi}{n} = 0$$

Also theilen auch die vom Centrum der Ellipse nach den n Eckpunkten gezogenen Geraden das n-Eck und die Fläche der Ellipse selbst in n gleiche Theile.

Ferner ist die Enveloppe der Polygone grössten Inhalts die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\frac{2\pi}{n}}{1-\cos\frac{2\pi}{n}} \tag{10}$$

und die Berührungspunkte der Seiten mit dieser Ellipse (10) liegen in ihren Mitten und sind die Eckpunkte der in (10) eingeschriebenen n-Ecke grössten Inhalts.

Nehmen wir $n = 4$, so erhalten wir als Vierecke grössten Inhalts, die Parallelogramme, deren Ecken auf den Endpunkten von zwei conjugirten Durchmessern der Ellipse liegen, und welche den constanten Inhalt

$$J_1 = 2\ ab$$

haben.

---

§ 3.

Ich gehe nun dazu über, die durch drei gegebene Punkte gehende Ellipse kleinsten Inhalts zu finden.

Sind $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, $x_3\,y_3$ die rechtwinklichen Coordinaten dreier beliebiger Punkte für ein Coordinatensystem, von dem ich der Einfachheit wegen annehmen will, dass sein Anfangspunkt innerhalb der durch die drei Punkte bestimmten Dreiecksfläche liegt, so seien

$$\alpha_\varkappa = p_\varkappa\,x + q_\varkappa\,y + r_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3) \tag{1}$$

die Gleichungen der durch $x_2\,y_2$, $x_3\,y_3$; $x_3\,y_3$, $x_1\,y_1$; $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$ bestimmten Geraden. Es bedeuten dabei die $p_\varkappa, q_\varkappa$ die Richtungscosinus der zu $\alpha_\varkappa$ normalen Geraden und $r_\varkappa$ die negativ genommenen senkrechten Abstände der $\alpha_\varkappa$ vom Anfangspunkt. Und zwar sind durch die gegebenen Coordinaten ausgedrückt

$$p_1 = \frac{y_2 - y_3}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}}\,; \quad q_1 = \frac{-(x_2-x_3)}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}}\,; \quad r_1 = \frac{x_2\,y_3 - x_3\,y_2}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}}$$

u. s. w. Die Vorzeichen der Quadratwurzeln sind so zu bestimmen, dass die $r_\varkappa$ negativ werden, so dass hierdurch auch die Werthe der Richtungscosinus eindeutig festgesetzt sind.

Ferner will ich bezeichnen

$$\triangle = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$$

und das System der Unterdeterminanten von $\triangle$ mit $\triangle_{\varkappa\lambda}$.

Zunächst bemerke ich, dass $\triangle$ nie Null sein kann, weil dann die drei Geraden $\alpha_\varkappa = 0$ durch einen Punkt gehen würden, ebenso wenig kann eine der Grössen $\triangle_{\varkappa 3}$ gleich Null sein, denn sonst wären zwei der Linien einander parallel.

Nehme ich nun das gegebene Dreieck als Fundamentaldreieck eines trilinearen Coordinatensystems, so lässt sich die Gleichung jeder durch die drei Ecken dieses Dreiecks gehenden Curve zweiten Grades auf die Form bringen:

$$u' \alpha_2 \alpha_3 + v' \alpha_3 \alpha_1 + w' \alpha_1 \alpha_2 = 0 \tag{2}$$

Da aber in unserer Aufgabe diese Curve eine Ellipse sein soll, so wissen wir, dass die Grössen u', v', w' weder 0 noch ∞ werden dürfen; daher können wir durch eine dieser Grössen dividiren und erhalten:

$$u \alpha_2 \alpha_3 + v \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 = 0 \tag{3}$$

Für rechtwinkliche Coordinaten ist ferner die allgemeinste Gleichung einer Curve zweiten Grades

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0 \tag{4}$$

und soll diese Curve durch die drei gegebenen Punkte gehen, so ergeben sich für die Coefficienten die Werthe:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= u p_2 p_3 + v p_3 p_1 + p_1 p_2 \\
2 a_{12} &= u (p_2 q_3 + p_3 q_2) + v (p_3 q_1 + p_1 q_3) + (p_1 q_2 + p_2 q_1) \\
a_{22} &= u q_2 q_3 + v q_3 q_1 + q_1 q_2 \\
2 a_{13} &= u (p_2 r_3 + p_3 r_2) + v (p_3 r_1 + p_1 r_3) + (p_1 r_2 + p_2 r_1) \\
2 a_{23} &= u (q_2 r_3 + q_3 r_2) + v (q_3 r_1 + q_1 r_3) + (q_1 r_2 + q_2 r_1) \\
a_{33} &= u r_2 r_3 + v r_3 r_1 + r_1 r_2
\end{aligned}$$

Setze ich nun die Discriminante von (4)

$$\overline{\triangle} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

und die Determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

wo $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$ zu nehmen ist, so ist bekanntlich das Quadrat des Flächeninhalts einer durch (4) dargestellten Ellipse:

$$F^2 = \frac{\overline{\triangle}^2}{\delta^3} \pi^2$$

$\overline{\triangle}$ und δ stelle ich jetzt als Funktionen von u und v dar.

Es ist zunächst

$$\delta = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2up_2p_3+2vp_3p_1+2p_1p_2; & u(p_2q_3+p_3q_2)+v(p_3q_1+p_1q_3)+(p_1q_2+p_2q_1) \\ u(p_2q_3+p_3q_2)+v(p_3q_1+p_1q_3)+(p_1q_2+p_2q_1); & 2uq_2q_3+2vq_3q_1+2q_1q_2 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante geht aber hervor aus der Combination der beiden folgenden Elementensysteme:

$$\delta = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} vp_3+p_2; & up_3+p_1; & up_2+vp_1 \\ vq_3+q_2; & uq_3+q_1; & uq_2+vq_1 \end{pmatrix}$$

und hieraus findet man:

$$\delta = \frac{1}{4}\begin{Bmatrix} \triangle_{13}u(-\triangle_{13}u+\triangle_{23}v+\triangle_{33}) \\ +\triangle_{23}v(\ \triangle_{13}u-\triangle_{23}v+\triangle_{23}) \\ +\triangle_{33}\ (\ \triangle_{13}u+\triangle_{23}v-\triangle_{33}) \end{Bmatrix}$$

Ferner sieht man sofort, dass sich $\overline{\triangle}$ als das Product der zwei folgenden Determinanten darstellen lässt:

$$\overline{\triangle} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} vp_3+p_2, & up_3+p_1, & vp_1+up_2 \\ vq_3+q_2, & uq_3+q_1, & vq_1+uq_2 \\ vr_3+r_2, & ur_3+r_1, & vr_1+ur_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\triangle\triangle_1$$

woraus weiter folgt:

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & v \\ 1 & 0 & u \\ v & u & 0 \end{vmatrix} = 2\triangle uv$$

also ergiebt sich schliesslich:

$$\overline{\triangle} = \frac{1}{4}\triangle^2 uv$$

Wir haben demnach

$$F^2 = \frac{\triangle^4 u^2 v^2}{\delta^3}\frac{\pi^2}{16}$$

F^2 soll nun ein Minimum werden; der Einfachheit wegen setze ich jedoch lieber fest, dass $\frac{1}{F^2}$ ein Maximum werden soll. In den hieraus folgenden beiden Gleichungen

$$\frac{d\frac{1}{F^2}}{du} = 0; \qquad \frac{d\frac{1}{F^2}}{dv} = 0$$

kann ich den constanten Faktor $\frac{\pi^2\triangle^4}{16}$ sowie die beiden Faktoren $\frac{\delta^2}{u^3v^2}$ und $\frac{\delta^2}{u^2v^3}$ weglassen und erhalte hiernach zur Bestimmung von u und v die beiden Gleichungen:

(5)

$$P_1 = -2\triangle_{11}^2u^2+\triangle_{13}\triangle_{23}uv+\triangle_{23}^2v^2+\triangle_{13}\triangle_{33}u-2\triangle_{23}\triangle_{33}v+\triangle_{33}^2=0$$

$$P_2 = \triangle_{13}^2u^2+\triangle_{13}\triangle_{23}uv-2\triangle_{23}^2v^2-2\triangle_{13}\triangle_{33}u+\triangle_{23}\triangle_{33}v+\triangle_{33}^2=0$$

Diesen beiden Gleichungen müssen vier Werthepaare von u, v genügen; doch sind für unsere Aufgabe nur die maassgebend, welche endlich, reell und von Null verschieden sind.

Es folgt aus (5) zunächst

(6) $$P_2 - P_1 = (\triangle_{13} u - \triangle_{23} v)(\triangle_{13} u + \triangle_{23} v - \triangle_{33}) = 0$$

und durch zweckmässige Behandlung der Gleichungen (5) und (6) finde ich sehr leicht die folgenden drei Wurzelwerthenpaare von (5):

$$u_1 = \frac{\triangle_{33}}{\triangle_{13}}; \quad u_2 = \frac{\triangle_{33}}{\triangle_{13}}; \quad u_3 = 0$$

$$v_1 = \frac{\triangle_{33}}{\triangle_{23}}; \quad v_2 = 0 \; ; \quad v_3 = \frac{\triangle_{33}}{\triangle_{23}}$$

Um nun das noch fehlende vierte Werthenpaar zu finden, setze ich in (5) $u = \frac{u'}{w'}$, $v = \frac{v'}{w'}$, multiplicire mit w' und setze sodann $w' = 0$, so ergiebt sich:

$$\overline{P}_1 = (2\triangle_{13} u' + \triangle_{23} v')(-\triangle_{13} u' + \triangle_{23} v') = 0$$

$$\overline{P}_2 = (\triangle_{13} u' + 2\triangle_{23} v')(\triangle_{13} u' - \triangle_{23} v') = 0$$

und hieraus:

$$(\triangle_{13} u' - \triangle_{23} v')(3\triangle_{13} u' + 3\triangle_{23} v') = 0$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass noch ein Wurzelwerthenpaar existirt, dem ich, weil es bei u', v', w' nur auf die Verhältnisse ankommt, die Gestalt geben kann:

$$u' = \triangle_{23}, \; v' = \triangle_{13}, \; w' = 0$$

oder

$$u_4 = \infty, \quad v_4 = \infty$$

Wir sehen also, dass das einzige Werthenpaar, welches eine Lösung unseres Problems geben kann, das Werthenpaar

$$u = \frac{\triangle_{33}}{\triangle_{13}}; \quad v = \frac{\triangle_{33}}{\triangle_{23}}$$

ist. Nach der Natur der Aufgabe müssen diese Werthe auch wirklich dem Minimalwerth von F entsprechen, so dass eine Untersuchung der zweiten Differentialquotienten nicht nöthig ist.

Fasse ich $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ als die Gleichungen zweier Curven zweiten Grades auf, so stellen sie zwei Hyperbeln dar, die ein Paar paralleler Assymptoten haben und in Folge dessen drei Schnittpunkte im Endlichen und einen im Unendlichen besitzen.

Die Gleichung der Ellipse kleinsten Inhalts, die durch die Ecken eines gegebenen Dreiecks geht, ist demnach die höchst einfache:

$$\frac{\alpha_2\,\alpha_3}{\triangle_{12}} + \frac{\alpha_3\,\alpha_1}{\triangle_{23}} + \frac{\alpha_1\,\alpha_2}{\triangle_{33}} = 0$$

oder in anderer Form:

(7) $$\triangle_{23}\triangle_{33}\alpha_2\alpha_3 + \triangle_{33}\triangle_{13}\alpha_3\alpha_1 + \triangle_{13}\triangle_{23}\alpha_1\alpha_2 = 0$$

Nun ist aber nach der im Anfang gegebenen Erklärung der $p_\varkappa, q_\varkappa$

$$\triangle_{13} = p_2 q_3 - p_3 q_2 = \cos\phi_2 \sin\phi_3 - \sin\phi_2 \cos\phi_3 = \sin(\phi_3 - \phi_2) = \sin(\alpha_2, \alpha_3)$$

$$\triangle_{23} = p_3 q_1 - p_1 q_3 = \sin(\phi_1 - \phi_3) = \sin(\alpha_3, \alpha_1)$$

$$\triangle_{33} = p_1 q_2 - p_2 q_1 = \sin(\phi_2 - \phi_1) = \sin(\alpha_1, \alpha_2)$$

Wir können der Gleichung der Ellipse kleinsten Inhalts also auch die Gestalt geben:

$$\frac{\alpha_2\,\alpha_3}{\sin(\alpha_2,\alpha_3)} + \frac{\alpha_3\,\alpha_1}{\sin(\alpha_3,\alpha_1)} + \frac{\alpha_1\,\alpha_2}{\sin(\alpha_1,\alpha_2)} = 0 \tag{8}$$

Dass die Gleichung (7) unter allen Umständen, so lange die Punkte $x_1\,y_1\,\ldots$ keine singuläre Lage haben, eine Ellipse darstellt, folgt daraus, dass δ den positiven Werth $\frac{3}{4}\,\triangle_{3\,3}^2$ hat.

Als Gleichung der Tangente im Punkte $x_3\,y_3$ findet man:

$$(\triangle_{2\,3}\,p_2 + \triangle_{1\,3}\,p_1)\,(x-x_3) + (\triangle_{2\,3}\,q_2 + \triangle_{1\,3}\,q_1)\,(y-y_3) = 0$$

Nun ist

$$\triangle_{2\,3}\,p_2 + \triangle_{1\,3}\,p_1 = \cos\phi_3\,\sin(\phi_1-\phi_2);\quad \triangle_{2\,3}\,q_2 + \triangle_{1\,3}\,q_1 = \sin\phi_3\,\sin(\phi_1-\phi_2)$$

und daher die Gleichung der Tangente:

$$\cos\phi_3\,x + \sin\phi_3\,y - (\cos\phi_3\,x_3 + \sin\phi_3\,y_3) = 0$$

Ferner ist

$$\alpha_3 = \cos\phi_3\,x + \sin\phi_3\,y + r_3 = 0$$

Hieraus geht hervor, dass die Tangente im Punkte $x_3\,y_3$ der gegenüberliegenden Seite des gegebenen Dreiecks parallel ist. Dies gilt natürlich ganz genau so für die übrigen Tangenten und Seiten.

Denke ich mir nun die Gleichung der Ellipse kleinsten Inhalts auf die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gebracht, und setze ich sodann

$$x = a\,\lambda;\quad y = b\,\mu$$

so geht die Ellipse in einen Kreis über, und das gegebene Dreieck in ein diesem Kreis eingeschriebenes, welches noch die Eigenschaft hat, dass die Tangenten in seinen Ecken den gegenüberliegenden Seiten parallel sind, und deshalb ein gleichseitiges Dreieck sein muss. Hieraus folgt aber, dass das gegebene Dreieck ein der umschriebenen Ellipse kleinsten Inhalts eingeschriebenes Dreieck grössten Inhalts ist.

Da nun der Inhalt eines Dreiecks grössten Inhalts

$$f = \frac{3}{4}\,ab\sqrt{3}$$

beträgt, so muss der Inhalt der Ellipse kleinsten Inhalts

$$F = \frac{4}{9}\,\sqrt{3}\,f\pi$$

sein. In der That findet man aus

$$F = \frac{2}{9}\,\pi\,\sqrt{3}\,\frac{\triangle^2}{\triangle_{1\,3}\,\triangle_{2\,3}\,\triangle_{3\,3}}$$

zunächst durch eine leichte Rechnung, wenn f_1, f_2, f_3 die Längen der drei Seiten des Dreiecks bedeuten

$$\triangle = \frac{4f^2}{f_1 f_2 f_3};\qquad \triangle_{1\,3}\,\triangle_{2\,3}\,\triangle_{3\,3} = \frac{8f^3}{f_1^2 f_2^2 f_3^2}$$

und hiernach, wie es auch sein musste:

$$F = \frac{4}{9}\sqrt{3}\, f\pi$$

Für ein gleichseitiges Dreieck gestaltet sich die Untersuchung sehr einfach, wie folgt:

Lege ich den Anfangspunkt der Coordinaten in den Schwerpunkt des Dreiecks und die x-Achse parallel der Seite $\alpha_1 = 0$, so ist, wenn h die Höhe des Dreiecks bedeutet

$$\alpha_1 = -y - \frac{h}{3} = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, x + \frac{1}{2} y - \frac{h}{3} = 0$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\, x + \frac{1}{2} y - \frac{h}{3} = 0$$

und man erhält als Gleichung der umschriebenen Ellipse kleinsten Inhalts die des Kreises:

$$x^2 + y^2 = \frac{4}{9} h^2.$$

---

§ 4.

Nachdem ich im § 2 und § 3 das Hauptsächlichste über die einer Ellipse eingeschriebenen Dreiecke grössten Inhalts angeführt habe, wende ich mich jetzt naturgemäss zur Untersuchung der in ein gegebenes Ellipsoid eingeschriebenen Tetraeder grössten Volumens.

Das Ellipsoid habe die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Bezeichnen sodann $x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$, $x_3\ y_3\ z_3$, $x_4\ y_4\ z_4$ die rechtwinklichen Coordinaten von vier auf dem Ellipsoid liegenden Punkten, so ist das sechsfache Volumen des durch sie bestimmten Tetraeders:

$$6\ V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = D$$

D soll also nach unserem Problem ein Maximum werden, wenn unter den zwölf Veränderlichen die vier Gleichungen

$$\frac{x_\varkappa^2}{a^2} + \frac{y_\varkappa^2}{b^2} + \frac{z_\varkappa^2}{c^3} = 1 \quad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

bestehen.

Setze ich nun ähnlich wie im § 2

$$x_\varkappa = a\lambda_\varkappa\,; \quad y_\varkappa = b\mu_\varkappa\,; \quad z_\varkappa = c\nu_\varkappa$$

so erhalten wir:

$$\frac{6V}{abc} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ 1 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ 1 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ 1 & \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 \end{vmatrix} = \triangle$$

so dass jetzt $\triangle$ ein Maximum werden soll, während die Gleichungen

$$\lambda_\varkappa^2 + \mu_\varkappa^2 + \nu_\varkappa^2 = 1$$

erfüllt sein müssen.

Dies ist aber wieder genau die Aufgabe des § 1 für den Fall $n = 3$, und mit Benutzung der dort gefundenen Resultate finden wir, dass der constante Inhalt sämmtlicher Tetraeder grössten Volumens

$$V = \frac{8}{27}\, abc\,\sqrt{3}$$

beträgt. Zur Bestimmung der Coordinaten ihrer Eckpunkte hat man ferner folgende zehn Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=1\,;\ \lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=-\tfrac{1}{3}\,;\ \lambda_1\lambda_3+\mu_1\mu_3+\nu_1\nu_3=-\tfrac{1}{3}\,;\ \lambda_1\lambda_4+\mu_1\mu_4+\nu_1\nu_4=-\tfrac{1}{3}\\
&\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2=1\,;\ \lambda_2\lambda_3+\mu_2\mu_3+\nu_2\nu_3=-\tfrac{1}{3}\,;\ \lambda_2\lambda_4+\mu_2\mu_4+\nu_2\nu_4=-\tfrac{1}{3}\\
&\lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2=1\,;\ \lambda_3\lambda_4+\mu_3\mu_4+\nu_3\nu_4=-\tfrac{1}{3}\\
&\lambda_4^2+\mu_4^2+\nu_4^2=1
\end{aligned} \qquad (1)$$

Von diesen folgt aber eine aus allen andern, und daher wird sich jede dieser zwölf Grössen durch drei Parameter ausdrücken lassen müssen.

Es ist mir nicht gelungen, auch diese Gleichungen, analog den entsprechenden des § 2, ohne Zuhilfenahme ihrer geometrischen Bedeutung zu behandeln; benutzt man dagegen diese letztere, so wird ihre Lösung in folgender Weise einfach erreicht.

Fasst man die $\lambda_\varkappa, \mu_\varkappa, \nu_\varkappa$ als die Richtungscosinus von vier Strecken auf, so sagen die Gleichungen (1) aus, dass, wenn man diese Strecken alle vom Anfangspunkt der Coordinaten ausgehen lässt, jede mit jeder einen Winkel D einschliesst, der die Bedingung: $\cos D = -\frac{1}{3}$ erfüllt. Denkt man sich nun in eine um den Anfangspunkt mit dem Radius 1 beschriebene Kugel ein regelmässiges Tetraeder eingeschrieben, so erfüllen die vom Mittelpunkt nach den Ecken gezogenen Strecken die Forderungen der Gleichungen (1), und die $\lambda_\varkappa, \mu_\varkappa, \nu_\varkappa$ sind zugleich die Coordinaten der Eckpunkte dieser Tetraeder.

Es giebt natürlich eine dreifach unendliche Schaar solcher Tetraeder, wie man auch aus der folgenden Betrachtungsweise ersehen kann. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der Kugel lassen sich nämlich rational durch zwei Grössen ausdrücken.

Nehmen wir einen solchen beliebigen Punkt als ersten Eckpunkt des regelmässigen Tetraeders an, so kann ein zweiter noch beliebig auf einem auf der Kugel liegenden Kreise sich bewegen, der durch einen geraden Kegel, dessen Spitze im gewählten ersten Punkt liegt, dessen Achse die Gerade von diesem nach dem Mittelpunkt der Kugel ist, und dessen Winkelöffnung $\pi - D$ beträgt, ausgeschnitten wird. Die Coordinaten dieses zweiten Punktes werden sich also, ebenso wie die der noch übrigen zwei Eckpunkte, durch drei willkürliche Grössen ausdrücken lassen, und zwar kann dies, wie wir sehen werden, auf rationale Weise geschehen.

Führe ich Polarcoordinaten ein, so sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der Kugel mit dem Radius 1

$$\lambda_1 = \cos\phi\cos\psi\,;\quad \mu_1 = \sin\phi\cos\psi\,;\quad \nu_1 = \sin\psi \tag{2}$$

wo ψ den Winkel des Radius, der nach diesem Punkte führt, mit der $\lambda\mu$-Ebene, und ϕ den Winkel, den die Projection dieses Radius auf die $\lambda\mu$-Ebene mit der λ-Achse bildet, bedeutet. Lege ich nun durch $(\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1)$ beliebig einen grössten Kreis, bezeichne mit ξ den sphärischen Winkel, den jener mit dem durch $(\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1)$ und senkrecht zur $\lambda\mu$-Ebene gelegten grössten Kreis bildet, und trage von $(\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1)$ aus auf dem ersteren eine sphärische Strecke D ab, so erhalte ich einen zweiten Eckpunkt des Tetraeders, dessen Coordinaten λ_2, μ_2, ν_2 sich als Funktionen der willkürlichen Grössen ϕ, ψ, ξ werden darstellen lassen.

Um nach Wahl des ersten Eckpunktes eine bestimmte Reihenfolge in der Zählung der übrigen festzusetzen, wollen wir den Winkel ξ kleiner als $\frac{2\pi}{3}$ und in dem Sinne als wachsend annehmen, dass man, vom Mittelpunkt der Kugel aus gesehen, eine Drehung von rechts nach links ausführen muss, um die Ebene des durch den Winkel ψ bestimmten grössten Kreises in die Lage des zweiten, auf dem der Punkt $(\lambda_2\ \mu_2\ \nu_2)$ liegt, zu bringen. Durch die Annahme $\xi < \frac{2\pi}{3}$ wird zwar der Bereich der willkürlichen Grösse ξ beschränkt, die Anzahl der verschiedenen durch die so gefundenen Coordinaten der Eckpunkte bestimmten Tetraeder jedoch nicht. Denn nehme ich z. B. $\frac{2\pi}{3} \leq \xi < \frac{4\pi}{3}$ so werden alle hierdurch dargestellten Tetraeder genau dieselben wie die ersten sein, nur mit dem Unterschiede, dass die Ecken in anderer Reihenfolge gezählt werden.

Einen dritten Eckpunkt bildet alsdann die dritte Ecke eines der beiden gleichseitigen sphärischen Dreiecke, deren beide ersten Punkte $(\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1)$ und $(\lambda_2\ \mu_2\ \nu_2)$ sind und deren drei Winkel $\zeta = \frac{2\pi}{3}$ betragen; und zwar wollen wir als dritten Eckpunkt den von den beiden so bestimmten Punkten wählen, der so liegt, dass durch den bei $(\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1)$ liegenden Winkel ζ der Winkel ξ vergrössert wird.

Beachtet man diese Zählungsweise, so findet man durch Behandlung der sphärischen Figuren, welche durch die Eckpunkte der Tetraeder und ihre Polarcoordinaten auf der Kugeloberfläche bestimmt werden, nach ziemlich weitläufigen trigonometrischen Umformungen und mit Anwendung der Relationen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$
$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0$$
$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 0$$

die $\lambda_\varkappa, \mu_\varkappa, \nu_\varkappa$ in folgender Weise durch die Grössen ϕ, ψ, ξ ausgedrückt:

(3)
$$\lambda_1 = \cos\phi\cos\psi$$
$$\mu_1 = \sin\phi\cos\psi$$
$$\nu_1 = \sin\psi$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3}\cos\phi\cos\psi + \frac{2}{3}\sqrt{2}\,(\cos\phi\sin\psi\cos\xi - \sin\phi\sin\xi)$$
$$\mu_2 = -\frac{1}{3}\sin\phi\cos\psi + \frac{2}{3}\sqrt{2}\,(\sin\phi\sin\psi\cos\xi + \cos\phi\sin\xi)$$
$$\nu_2 = -\frac{1}{3}\sin\psi + \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\cos\psi\cos\xi$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{3}\cos\phi\cos\psi - \frac{1}{3}\sqrt{2}\left\{\cos\phi\sin\psi\cos\xi - \sin\phi\sin\xi + \sqrt{3}\,(\cos\phi\sin\psi\sin\xi + \sin\phi\cos\xi)\right\}$$
$$\mu_3 = -\frac{1}{3}\sin\phi\cos\psi - \frac{1}{3}\sqrt{2}\left\{\sin\phi\sin\psi\cos\xi + \cos\phi\sin\xi + \sqrt{3}\,(\sin\phi\sin\psi\sin\xi - \cos\phi\cos\xi)\right\}$$
$$\nu_3 = -\frac{1}{3}\sin\psi + \frac{1}{3}\sqrt{2}\,\cos\psi\left\{\cos\xi + \sqrt{3}\,\sin\xi\right\}$$

$$\lambda_4 = -\frac{1}{3}\cos\phi\cos\psi - \frac{1}{3}\sqrt{2}\left\{\cos\phi\sin\psi\cos\xi - \sin\phi\sin\xi - \sqrt{3}\,(\cos\phi\sin\psi\sin\xi + \sin\phi\cos\xi)\right\}$$
$$\mu_4 = -\frac{1}{3}\sin\phi\cos\psi - \frac{1}{3}\sqrt{2}\left\{\sin\phi\sin\psi\cos\xi + \cos\phi\sin\xi - \sqrt{3}\,(\sin\phi\sin\psi\sin\xi - \cos\phi\cos\xi)\right\}$$
$$\nu_4 = -\frac{1}{3}\sin\psi + \frac{1}{3}\sqrt{2}\,\cos\psi\left\{\cos\xi - \sqrt{3}\,\sin\xi\right\}$$

Diese für die zwölf Grössen $\lambda_\varkappa, \mu_\varkappa, \nu_\varkappa$ gefundenen Funktionen der drei willkürlichen Grössen ϕ, ψ, ξ erfüllen in der That die Gleichungen (1) identisch und ergeben für $\triangle$ den positiven Werth $\frac{16}{9}\sqrt{3}$, so dass die gestellte Aufgabe hiermit gelöst ist.

Setzt man nämlich wieder

$$x_\varkappa = a\lambda_\varkappa; \quad y_\varkappa = b\mu_\varkappa; \quad z_\varkappa = c\nu_\varkappa$$

und ferner

$$tg\,\frac{\phi}{2} = r; \quad tg\,\frac{\psi}{2} = s; \quad tg\,\frac{\xi}{2} = t$$

so erhält man schliesslich die Coordinaten der Eckpunkte der in das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

eingeschriebenen Tetraeder mit dem constanten grössten Inhalt

$$V = \frac{8}{27}\,a\,b\,c\sqrt{3}$$

rational durch die willkürlichen Grössen r, s, t dargestellt.

Ich will noch kurz eine andere Art, die Coordinaten der Eckpunkte der in eine Kugel mit dem Radius 1 eingeschriebenen regelmässigen Tetraeder durch drei Parameter rational auszudrücken, anführen.

Lege ich nämlich die Coordinatenachsen der λ', μ', ν' so, dass eine Ecke des Tetraeders in der positiven ν'-Achse und eine zweite auf der positiven Hälfte der $\lambda'\nu'$-Ebene liegt, so sind die Coordinaten der vier Eckpunkte:

$$\begin{aligned}
\lambda'_1 &= 0 \quad , \quad \mu'_1 = 0 \quad , \quad \nu'_1 = 1 \\
\lambda'_2 &= \frac{2}{3}\sqrt{2} \, , \quad \mu'_2 = 0 \quad , \quad \nu'_2 = -\frac{1}{3} \\
\lambda'_3 &= -\frac{1}{3}\sqrt{2} \, , \quad \mu'_3 = \frac{1}{3}\sqrt{6} \, , \quad \nu'_3 = -\frac{1}{3} \\
\lambda'_4 &= -\frac{1}{3}\sqrt{2} \, , \quad \mu'_4 = -\frac{1}{3}\sqrt{6} \, , \quad \nu'_4 = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Verlege ich nun die Richtung der Coordinatenachsen beliebig durch die homogene lineare Substitution

$$\begin{aligned}
\lambda &= \alpha\lambda' + \alpha'\mu' + \alpha''\nu' \\
\mu &= \beta\lambda' + \beta'\mu' + \beta''\nu' \\
\nu &= \gamma\lambda' + \gamma'\mu' + \gamma''\nu'
\end{aligned}$$

so sind die α, β, γ die neun Richtungscosinus der drei neuen Achsen mit den alten, welche die bekannten Gleichungen der orthogonalen Substitution erfüllen müssen und in folgender Weise durch die von Euler eingeführten Winkel Φ, Ψ, Θ ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\Phi\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi\cos\Theta \\
\beta &= \cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi\cos\Theta \\
\gamma &= \sin\Phi\sin\Theta \\
\hline
\alpha' &= \sin\Phi\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi\cos\Theta \\
\beta' &= \sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos\Theta \\
\gamma' &= -\cos\Phi\sin\Theta \\
\hline
\alpha'' &= -\sin\Psi\sin\Theta \\
\beta'' &= \cos\Psi\sin\Theta \\
\gamma'' &= \cos\Theta
\end{aligned}$$

Beachten wir dieses, so erhalten wir allgemein die Eckpunkte der regelmässigen Tetraeder durch die drei willkürlichen Grössen Φ, Ψ, Θ wie folgt, dargestellt:

(4)

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha'' \quad ; \mu_1 = \beta'' \quad ; \nu_1 = \gamma'' \\
\lambda_2 &= \frac{2}{3}\sqrt{2}\alpha - \frac{1}{3}\alpha'' \quad ; \mu_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}\beta - \frac{1}{3}\beta'' \quad ; \nu_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}\gamma - \frac{1}{3}\gamma'' \\
\lambda_3 &= -\frac{1}{3}\sqrt{2}\alpha + \frac{1}{3}\sqrt{6}\alpha' - \frac{1}{3}\alpha'' ; \mu_3 = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\beta + \frac{1}{3}\sqrt{6}\beta' - \frac{1}{3}\beta'' ; \nu_3 = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\gamma + \frac{1}{3}\sqrt{6}\gamma' - \frac{1}{3}\gamma'' \\
\lambda_4 &= -\frac{1}{3}\sqrt{2}\alpha - \frac{1}{3}\sqrt{6}\alpha' - \frac{1}{3}\alpha'' ; \mu_4 = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\beta - \frac{1}{3}\sqrt{6}\beta' - \frac{1}{3}\beta'' ; \nu_4 = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\gamma - \frac{1}{3}\sqrt{6}\gamma' - \frac{1}{3}\gamma''
\end{aligned}$$

Ich werde jetzt noch einige Eigenschaften der Tetraeder grössten Inhalts angeben, die den im § 2 für die Dreiecke grössten Inhalts angeführten analog sind.

I. Es ist bekanntlich das Quadrat des Inhalts eines Dreiecks im Raume gleich der Summe der Quadrate der Projectionen des Dreiecks auf die drei Coordinatenebenen.

Daher erhält man zum Beispiel für den Inhalt des durch die Punkte $x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$, $x_3\ y_3\ z_3$ bestimmten Raumdreiecks den Ausdruck:

$$4f^2 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2$$

oder nach den im § 1 entwickelten Relationen

$$\frac{3}{4} f^2 = b^2 c^2 \lambda_4^2 + a^2 c^2 \mu_4^2 + a^2 b^2 \nu_4^2$$

Demnach ergiebt sich für die Oberfläche der Tetraeder grössten Volumens der Werth:

$$\overline{F} = \frac{2}{3} \sqrt{3}\ a\ b\ c \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\mu_1^2}{b^2} + \frac{\nu_1^2}{c^2}} + \ldots + \sqrt{\frac{\lambda_4^2}{a^2} + \frac{\mu_4^2}{b^2} + \frac{\nu_4^2}{c^2}} \right\}$$

II. Der Schwerpunkt der Tetraeder grössten Inhalts liegt im Centrum des Ellipsoides, da die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

bestehen.

Die durch den Mittelpunkt des Ellipsoides und die Kanten gelegten Ebenen theilen also sowohl die Tetraeder grössten Inhalts als auch das Volumen des Ellipsoides in vier gleiche Theile.

III. Die vier Ebenen, welche die Grenzflächen der Tetraeder bilden, und die vier Tangentialebenen in den gegenüberliegenden Eckpunkten haben die Gleichungen

$$\frac{\lambda_\varkappa}{a} x + \frac{\mu_\varkappa}{b} y + \frac{\nu_\varkappa}{c} z + \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{\lambda_\varkappa}{a} x + \frac{\mu_\varkappa}{b} y + \frac{\nu_\varkappa}{c} z - 1 = 0$$

und daher sind je zwei entsprechende Ebenen dieser Art einander parallel.

IV. Da bei vollständiger Variabilität der unabhängigen Grössen jede der Grenzflächen auch in die Lage der übrigen kommt, so haben alle ein und dieselbe Fläche zur Enveloppe, und zwar ist diese Fläche das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{9} \tag{5}$$

Auch hier liegen die Berührungspunkte mit (5) in den Schwerpunkten der begrenzenden Dreiecksflächen und sind zugleich die Eckpunkte der in (5) eingeschriebenen Tetraeder grössten Inhalts.

Endlich will ich noch Folgendes anführen:

V. Die vier Höhen der Tetraeder grössten Inhalts verhalten sich zu einander wie die Abstände der vier Begrenzungsflächen von dem Mittelpunkt, und zwar verhält sich jede Höhe zu dem entsprechenden Abstand wie 4 : 1.

Höhen und Abstände verhalten sich aber beide zu einander wie die reciproken Werthe der Produkte der beiden Halbdurchmesser, die zu den durch die Eckpunkte gehenden Durchmessern conjugirt sind.

VI. Die Eigenschaft, dass für jedes Tetraeder grössten Inhalts das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

das ihnen umschriebene kleinsten Inhalts ist, werde ich im Folgenden zeigen.

---

§ 5.

Sind $x_1\ y_1\ z_1, \ldots x_4\ y_4\ z_4$ die rechtwinklichen Coordinaten von vier im Endlichen gelegenen Punkten des Raumes, die aber nicht in einer Ebene, und von denen keine drei in einer Geraden liegen, so seien analog wie im § 3

$$\alpha_\varkappa = p_\varkappa\, x + q_\varkappa\, y + r_\varkappa\, z + s_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

die Gleichungen der vier durch sie bestimmten Ebenen. Die $p_\varkappa, q_\varkappa, r_\varkappa, s_\varkappa$ sind bekannte Funktionen der $x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa$ und haben eine ähnliche Bedeutung wie die entsprechenden Grössen des § 3.

Ich bezeichne wieder

$$\triangle = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{vmatrix}$$

und das System der Unterdeterminanten mit $\triangle_{\varkappa\lambda}$; dann kann nach den gemachten Voraussetzungen weder $\triangle$ noch eine der Grössen $\triangle_{\varkappa 4}$ den Werth Null haben.

Nehme ich ferner das durch die $\alpha_\varkappa = 0$ gebildete Tetraeder zum Fundamental-Tetraeder eines Systems von Vierebenen-Coordinaten, so hat die Gleichung jeder Fläche zweiten Grades, die durch die vier Eckpunkte des Tetraeders geht, die Gestalt:

$$(1) \qquad u\,\alpha_1\,\alpha_2 + v\,\alpha_1\,\alpha_3 + w\,\alpha_1\,\alpha_4 + r\,\alpha_2\,\alpha_3 + s\,\alpha_2\,\alpha_4 + t\,\alpha_3\,\alpha_4 = 0$$

Der Symetrie wegen behalte ich hier die sechs Grössen $u, v, \ldots t$ bei, obwohl ich durch eine dividiren könnte.

Für rechtwinkliche Coordinaten ist aber die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades

$$(2) \quad a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 l yz + 2 m zx + 2 n xy + 2 p x + 2 q y + 2 r z + d = 0$$

und soll diese Fläche durch die vier Punkte $x_\varkappa\ y_\varkappa\ z_\varkappa$ gehen, so ergeben sich für die Coefficienten die Werthe:

$$\begin{aligned}
a &= u p_1 p_2 + v p_1 p_3 + w p_1 p_4 + r p_2 p_3 + s p_2 p_4 + t p_3 p_4 \\
b &= u q_1 q_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + t q_3 q_4 \\
c &= u r_1 r_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + t r_3 r_4 \\
d &= u s_1 s_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + t s_3 s_4 \\
2\,l &= u(q_1 r_2 + q_2 r_1) + v(q_1 r_3 + q_3 r_1) + \ldots + t(q_3 r_4 + q_4 r_3) \\
2\,m &= u(r_1 p_2 + r_2 p_1) + \ldots\ldots\ldots + t(r_3 p_4 + r_4 p_3) \\
2\,n &= u(p_1 q_2 + p_2 q_1) + \ldots\ldots\ldots + t(p_3 q_4 + p_4 q_3) \\
2\,p &= u(p_1 s_2 + p_2 s_1) + \ldots\ldots\ldots + t(p_3 s_4 + p_4 s_3) \\
2\,q &= u(q_1 s_2 + q_2 s_1) + \ldots\ldots\ldots + t(q_3 s_4 + q_4 s_3) \\
2\,r &= u(r_1 s_2 + r_2 s_1) + \ldots\ldots\ldots + t(r_3 s_4 + r_4 s_3)
\end{aligned}$$

Setze ich weiter die Discriminante von (2)

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p \\ n & b & l & q \\ m & l & c & r \\ p & q & r & d \end{vmatrix} = \overline{\triangle}$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} = \delta$$

so ist das Quadrat des Volumeninhalts eines durch (2) dargestellten Ellipsoides ausgedrückt durch:

$$F^2 = -\frac{16}{9}\,\pi^2\,\frac{\overline{\triangle}^3}{\delta^4}$$

Man findet nun, wenn man $\overline{\triangle}$ und δ wie die analogen Ausdrücke in der Ebene behandelt:

$$\overline{\triangle} = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} o & u & v & w \\ u & o & r & s \\ v & r & o & t \\ w & s & t & o \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\,\triangle^2 \triangle'$$

Sodann entsteht δ aus der Summe der Produkte sämmtlicher Determinanten, die aus folgenden Elementensystemen gebildet werden können:

$$\delta = \frac{1}{8}\begin{Bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} up_2 + vp_3 + wp_4 ; & up_1 + rp_3 + sp_4 ; & vp_1 + rp_2 + tp_4 ; & wp_1 + sp_2 + tp_3 \\ uq_2 + vq_3 + wq_4 ; & uq_1 + rq_3 + sq_4 ; & vq_1 + rq_2 + tq_4 ; & wq_1 + sq_2 + tq_3 \\ ur_2 + vr_3 + wr_4 ; & ur_1 + rr_3 + sr_4 ; & vr_1 + rr_2 + tr_4 ; & wr_1 + sr_2 + tr_3 \end{Bmatrix}$$

Eine weitere Zerlegung ergiebt schliesslich:

$$\delta = \frac{1}{8}\left\{\triangle_{44}^2 \begin{vmatrix} o & u & v \\ u & o & r \\ v & r & o \end{vmatrix} + \triangle_{14}^2 \begin{vmatrix} o & r & s \\ r & o & t \\ s & t & o \end{vmatrix} + \triangle_{24}^2 \begin{vmatrix} o & t & v \\ t & o & w \\ v & w & o \end{vmatrix} + \triangle_{34}^2 \begin{vmatrix} o & w & s \\ w & o & u \\ s & u & o \end{vmatrix}\right.$$

$$- 2 \triangle_{14} \triangle_{44} \begin{vmatrix} u & v & w \\ o & r & s \\ r & o & t \end{vmatrix} + 2 \triangle_{24} \triangle_{44} \begin{vmatrix} v & w & o \\ r & s & u \\ o & t & v \end{vmatrix} - 2 \triangle_{34} \triangle_{44} \begin{vmatrix} w & o & u \\ s & u & o \\ t & v & r \end{vmatrix}$$

$$\left. - 2 \triangle_{14} \triangle_{24} \begin{vmatrix} r & s & u \\ o & t & v \\ t & o & w \end{vmatrix} + 2 \triangle_{14} \triangle_{34} \begin{vmatrix} s & u & o \\ t & v & r \\ o & w & s \end{vmatrix} - 2 \triangle_{24} \triangle_{34} \begin{vmatrix} t & o & w \\ v & w & o \\ r & s & u \end{vmatrix}\right\}$$

Da F^2 ein Minimum werden soll, so erhalte ich nach Weglassung verschiedener Faktoren zur Bestimmung der $u, v \ldots t$ die sechs Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} 3\,\delta \frac{d\triangle'}{du} - 4\,\triangle' \frac{d\delta}{du} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 3\,\delta \frac{d\triangle'}{dt} - 4\,\triangle' \frac{d\delta}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen aber wegen ihrer complicirten Form keine weitere allgemeine Discussion zu. Ich werde daher auf einem andern Wege zum Ziele zu gelangen suchen, indem ich zunächst die Reciprocität zwischen eingeschriebenem Tetraeder grössten und umschriebenem Ellipsoid kleinsten Inhalts nachweise und sodann vermittelst der schon bekannten Eigenschaften der Tetraeder grössten Inhalts die Gleichung des umschriebenen Ellipsoides kleinsten Inhalts bestimme.

Nehme ich also die $x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa$ so an, dass sie die Ecken eines dem Ellipsoid

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

eingeschriebenen Tetraeders grössten Inhalts sind, so müssen, wenn ich

$$x_\varkappa = a\lambda_\varkappa; \quad y_\varkappa = b\mu_\varkappa; \quad z_\varkappa = c\nu_\varkappa$$

setze, die $\lambda_\varkappa, \mu_\varkappa, \nu_\varkappa$ die oben weitläufig behandelten Bedingungsgleichungen erfüllen.

Die vier Ebenen $\alpha_\varkappa = 0$ haben sodann die Gleichungen:

$$\frac{\lambda_\varkappa}{a} x + \frac{\mu_\varkappa}{b} y + \frac{\nu_\varkappa}{c} z + \frac{1}{3} = 0$$

Bringe ich ferner die Gleichung des Ellipsoides (4) auf die Gestalt (1), so müssen die $u, v \ldots t$ den folgenden zehn Gleichungen genügen:

$$
\begin{aligned}
& u\lambda_1\lambda_2 + v\lambda_1\lambda_3 + w\lambda_1\lambda_4 + r\lambda_2\lambda_3 + s\lambda_2\lambda_4 + t\lambda_3\lambda_4 = 1 \\
& u\mu_1\mu_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + t\mu_3\mu_4 = 1 \\
& u\nu_1\nu_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + t\nu_3\nu_4 = 1 \\
& u(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + v(\lambda_1\mu_3 + \lambda_3\mu_1) + \ldots + t(\lambda_3\mu_4 + \lambda_4\mu_3) = 0 \\
(5)\qquad & u(\lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + t(\lambda_3\nu_4 + \lambda_4\nu_3) = 0 \\
& u(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + t(\mu_3\nu_4 + \mu_4\nu_3) = 0 \\
& u(\lambda_1 + \lambda_2) + v(\lambda_1 + \lambda_3) + \ldots + t(\lambda_3 + \lambda_4) = 0 \\
& u(\mu_1 + \mu_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + t(\mu_3 + \mu_4) = 0 \\
& u(\nu_1 + \nu_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + t(\nu_3 + \nu_4) = 0 \\
& u + v + w + r + s + t = -9
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen werden aber befriedigt durch das Werthsystem:

$$(6)\qquad u = v = w = r = s = t = -\frac{3}{2}$$

denn es ist nach dem Formelsystem (8), (10), (11) des § 1, welches die Grössen $\lambda_\varkappa, \mu_\varkappa, \nu_\varkappa$ erfüllen müssen:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 = -\frac{2}{3} \quad \text{u. s. w.}$$

ferner:

$$\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_3 + \lambda_3\mu_1 + \ldots + \lambda_3\mu_4 + \lambda_4\mu_3 =$$

$$\lambda_1(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) + \lambda_2(\mu_1 + \mu_3 + \mu_4) + \lambda_3(\mu_1 + \mu_2 + \mu_4) + \lambda_4(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) =$$

$$-(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 + \lambda_4\mu_4) = 0 \qquad \text{u. s. w.}$$

und endlich:

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0 \qquad \text{u. s. w.}$$

Bei den von uns gewählten Werthen der $x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa$ wird nun:

$$\triangle = \frac{1}{3}\,\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & 1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & 1 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 & 1 \\ \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{16}{27}\,\frac{1}{abc}\sqrt{3}$$

und daher:

$$\triangle_{14} = \triangle_{24} = \triangle_{34} = \triangle_{44} = -\frac{1}{abc}\,s_{\varkappa 0} = -\frac{4}{9}\,\frac{1}{abc}\sqrt{3}$$

Setzt man diese Werthe der $\triangle_{\varkappa 4}$ und die in (6) angegebenen der $u, v, \ldots t$ in die Gleichungen (3) ein, so werden diese dadurch identisch erfüllt.

Hierdurch ist demnach bewiesen, dass das Verhältniss zwischen eingeschriebenem Tetraeder grössten und umschriebenem Ellipsoid kleinsten Inhalts ein reciprokes ist.

Durch Beachtung dieses Resultates findet man die allgemeine Gleichung des durch die vier Punkte $x_\varkappa\, y_\varkappa\, z_\varkappa$ gehenden Ellipsoides kleinsten Inhalts auf folgende Weise.

Ich bestimme in der allgemeinen Gleichung

$$u\alpha_1\alpha_2 + v\alpha_1\alpha_3 + w\alpha_1\alpha_4 + r\alpha_2\alpha_3 + s\alpha_2\alpha_4 + t\alpha_3\alpha_4 = 0 \tag{7}$$

die Grössen $u, v \ldots t$ so, dass die in den Punkten

$$(\alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0),\quad (\alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_1 = 0)$$
$$(\alpha_4 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0),\quad (\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0)$$

an das Ellipsoid (7) gelegten Tangentialebenen den entsprechenden Ebenen $\alpha_\varkappa = 0$ parallel werden.

Ich erhalte hieraus, wenn n_1, n_2, n_3, n_4 vier neue Unbekannte bedeuten, für die Grössen $u, v, \ldots t, n_1, n_2, n_3, n_4$ die zwölf folgenden homogenen linearen Gleichungen:

$$\begin{cases} f_1 = p_1 n_1 + p_2 u + p_3 v + p_4 w = 0 \\ f'_1 = q_1 n_1 + q_2 u + q_3 v + q_4 w = 0 \\ f''_1 = r_1 n_1 + r_2 u + r_3 v + r_4 w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2 = p_1 u + p_2 n_2 + p_3 r + p_4 s = 0 \\ f'_2 = q_1 u + q_2 n_2 + q_3 r + q_4 s = 0 \\ f''_2 = r_1 u + r_2 n_2 + r_3 r + r_4 s = 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} f_3 = p_1 v + p_2 r + p_3 n_3 + p_4 t = 0 \\ f'_3 = q_1 v + q_2 r + q_3 n_3 + q_4 t = 0 \\ f''_3 = r_1 v + r_2 r + r_3 n_3 + r_4 t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_4 = p_1 w + p_2 s + p_3 t + p_4 n_4 = 0 \\ f'_4 = q_1 w + q_2 s + q_3 t + q_4 n_4 = 0 \\ f''_4 = r_1 w + r_2 s + r_3 t + r_4 n_4 = 0 \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden aber identisch erfüllt durch das Werthsystem:

$$\begin{aligned} &u = \triangle_{14}\triangle_{24};\quad v = \triangle_{14}\triangle_{34};\quad w = \triangle_{14}\triangle_{44} \\ &r = \triangle_{24}\triangle_{34};\quad s = \triangle_{24}\triangle_{44};\quad t = \triangle_{34}\triangle_{44} \\ &n_1 = \triangle^2_{14};\quad n_2 = \triangle^2_{24};\quad n_3 = \triangle^2_{34};\quad n_4 = \triangle^2_{44} \end{aligned} \tag{9}$$

Da nun die zwölf homogenen linearen Gleichungen (8) zwischen den zehn Unbekannten durch die endlichen und bestimmten Werthe (9) befriedigt werden, so müssen drei von den Gleichungen aus den übrigen folgen. In der That findet man, dass die folgenden drei Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} &s_1 f_1 + s_2 f_2 + s_3 f_3 + s_4 f_4 = 0 \\ &s_1 f'_1 + s_2 f'_2 + s_3 f'_3 + s_4 f'_4 = 0 \\ &s_1 f''_1 + s_2 f''_2 + s_3 f''_3 + s_4 f''_4 = 0 \end{aligned}$$

Das Ellipsoid, welches durch die vier Punkte $x_\varkappa y_\varkappa z_\varkappa$ geht und welches die Eigenschaft hat, dass die in den Punkten $x_\varkappa y_\varkappa z_\varkappa$ an es gelegten Tangentialebenen den

gegenüberliegenden Grenzflächen des durch die $x_\varkappa\ y_\varkappa\ z_\varkappa$ bestimmten Tetraeders parallel sind, hat also die höchst einfache und symetrische Gleichung:

$$(10)\quad \triangle_{14}\triangle_{24}\alpha_1\alpha_2+\triangle_{14}\triangle_{34}\alpha_1\alpha_3+\triangle_{14}\triangle_{44}\alpha_1\alpha_4+\triangle_{24}\triangle_{34}\alpha_2\alpha_3 + \triangle_{24}\triangle_{44}\alpha_2\alpha_4+\triangle_{34}\triangle_{44}\alpha_3\alpha_4=0$$

Dies ist aber zugleich auch die Gleichung des durch die vier Punkte gehenden Ellipsoides kleinsten Inhalts, wie aus einem Raisonnement, das dem im § 3 bei der Ellipse kleinsten Inhalts angewandten ähnlich ist, und aus der oben bewiesenen Reciprocität zwischen umschriebenem Ellipsoid kleinsten und eingeschriebenem Tetraeder grössten Inhalts folgt.

Eine ziemlich langwierige Rechnung zeigt, dass die in (9) angegebenen Werthe der $u, v, \ldots t$ den früher gefundenen allgemeinen Bedingungsgleichungen (3), wie es auch sein musste, ebenfalls genügen.

Ich brauche wohl kaum zu bemerken, dass die Gleichung (10) der Gleichung der durch drei Punkte gehenden Ellipse kleinsten Inhalts vollständig analog ist.

Für den Inhalt des Ellipsoides (10) selbst findet man endlich den folgenden einfachen und rational durch die Coordinaten $x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa$ ausgedrückten Werth.

Es war nämlich gefunden:

$$F^2=-\frac{1}{9}\,\frac{\triangle^6}{16^2}\,\frac{\triangle'^3}{\delta^4}\,\pi^2$$

und da sich einfach ergiebt:

$$\triangle'=-3\,(\triangle_{14}\triangle_{24}\triangle_{34}\triangle_{44})^2;\quad \delta=-\frac{1}{2}\,(\triangle_{14}\triangle_{24}\triangle_{34}\triangle_{44})^2$$

so folgt:

$$F=\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{\triangle^3}{\triangle_{14}\triangle_{24}\triangle_{34}\triangle_{44}}\,\pi$$

---

§ 6.

Eine allgemeine Untersuchung der in ein Ellipsoid eingeschriebenen Polyeder grössten Inhalts unterlasse ich, weil sie nichts Bemerkenswerthes bietet; dagegen will ich noch die Fälle des Octaeders und Hexaeders wegen ihrer Beziehungen zu den conjugirten Durchmessern des Ellipsoides behandeln.

Auch hier sieht man sofort, dass man das Problem durch die Substitution:

$$x=a\,\xi;\quad y=b\,\eta;\quad z=c\,\zeta$$

auf den Fall einer Kugel mit dem Radius 1 reduciren kann, weil die Volumina der sich entsprechenden Körper im Ellipsoid und in der Kugel das constante Verhältniss $a\,b\,c:1$ haben.

Ferner ergiebt sich ebenso einfach, dass die in die Kugel eingeschriebenen Octaeder und Hexaeder grössten Inhalts die regelmässigen Körper dieser Art sind.

Denke ich mir zunächst die drei Achsen eines in die Kugel eingeschriebenen regelmässigen Octaeders als die rechtwinklichen Coordinatenachsen, so sind die Coordinaten der sechs Eckpunkte:

$$\xi'_1 = 1,\ \eta'_1 = 0,\ \zeta'_1 = 0;\quad \xi'_2 = 0,\ \eta'_2 = 1,\ \zeta'_2 = 0;\qquad \text{u. s. w.}$$

Um nun die Coordinaten der Eckpunkte eines beliebigen eingeschriebenen Octaeders zu erhalten, denke ich mir die Richtungen der Coordinatenachsen verlegt durch die lineare Substitution:

$$\xi' = \alpha\ \xi + \beta\ \eta + \gamma\ \zeta$$
$$\eta' = \alpha'\ \xi + \beta'\ \eta + \gamma'\ \zeta$$
$$\zeta' = \alpha''\ \xi + \beta''\ \eta + \gamma''\ \zeta$$

Die neun Grössen α, β, γ sind wieder die bekannten Funktionen der drei Eulerschen Winkel Φ, Ψ, Θ.

Gehen wir sofort auf das Ellipsoid über, indem wir setzen

$$x = a\ \xi;\quad y = b\ \eta;\quad z = c\ \zeta$$

so bleiben bei dieser Substitution Punkte, die in einer Linie, und Linien, die in einer Ebene liegen, auch jetzt noch in einer Linie oder Ebene. Daher schneiden sich auch die Achsen der in das Ellipsoid eingeschriebenen Octaeder grössten Inhalts in einem Punkte und zwar im Mittelpunkte des Ellipsoides.

Die Coordinaten der Eckpunkte sind aber:

$$x_1 = a\,\alpha;\ x_2 = a\,\alpha';\ x_3 = -a\,\alpha;\ x_4 = -a\,\alpha';\ x_5 = a\,\alpha'';\ x_6 = -a\,\alpha''$$
$$y_1 = b\,\beta;\ y_2 = b\,\beta';\ y_3 = -b\,\beta;\ y_4 = -b\,\beta';\ y_5 = b\,\beta'';\ y_6 = -b\,\beta''$$
$$z_1 = c\,\gamma;\ z_2 = c\,\gamma';\ z_3 = -c\,\gamma;\ z_4 = -c\,\gamma';\ z_5 = c\,\gamma'';\ z_6 = -c\,\gamma''$$

Hieraus ergeben sich für die Quadrate der drei halben Achsen dieser Octaeder die Werthe:

$$a'^2 = a^2\,\alpha^2 + b^2\,\beta^2 + c^2\,\gamma^2$$
$$b'^2 = a^2\,\alpha'^2 + b^2\,\beta'^2 + c^2\,\gamma'^2$$
$$c'^2 = a^2\,\alpha''^2 + b^2\,\beta''^2 + c^2\,\gamma''^2$$

und eine Folge hiervon ist sofort:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Also die Summe der Quadrate der halben Achsen der Octaeder grössten Inhalts ist constant.

Die Richtungscosinus dieser drei Achsen mit den Coordinatenachsen der x, y, z haben ferner die Werthe:

$$\cos(a'x) = \frac{a\,\alpha}{a'},\quad \cos(a'y) = \frac{b\,\beta}{a'},\quad \cos(a'z) = \frac{c\,\gamma}{a'}$$
$$\cos(b'x) = \frac{a\,\alpha'}{b'},\quad \cos(b'y) = \frac{b\,\beta'}{b'},\quad \cos(b'z) = \frac{c\,\gamma'}{b'}$$
$$\cos(c'x) = \frac{a\,\alpha''}{c'},\quad \cos(c'y) = \frac{b\,\beta''}{c'},\quad \cos(c'z) = \frac{c\,\gamma''}{c'}$$

Nehme ich jetzt diese Achsen als die Achsen eines schiefwinklichen Coordinatensystems an, so muss ich setzen:

$$x = x' \cos(a'x) + y' \cos(b'x) + z' \cos(c'x) \quad \text{u. s. w.}$$

oder:

$$\frac{x}{a} = x' \frac{\alpha}{a'} + y' \frac{\alpha'}{b'} + z' \frac{\alpha''}{c'}$$

$$\frac{y}{b} = x' \frac{\beta}{a'} + y' \frac{\beta'}{b'} + z' \frac{\beta''}{c'}$$

$$\frac{z}{c} = x' \frac{\gamma}{a'} + y' \frac{\gamma'}{b'} + z' \frac{\gamma''}{c'}$$

Quadrire und addire ich diese Gleichungen, so erhalte ich als Gleichung des Ellipsoides für dieses schiefwinkliche Coordinatensystem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1$$

Hierfür hat also das Ellipsoid genau dieselbe Gleichung wie für die drei rechtwinklichen Hauptachsen, und damit sind die a', b', c' als die conjugirten Durchmesser des Ellipsoides definirt.

Da das Volumen des in die Kugel mit dem Radius 1 eingeschriebenen regelmässigen Octaeders $V' = \frac{4}{3}$ beträgt, so ist der constante Inhalt der durch die Endpunkte der conjugirten Durchmesser bestimmten Octaeder:

$$V = \frac{4}{3} a\, b\, c$$

Bezeichnen wir nun mit Staudt

$$\sin(x'\, y'\, z') = \begin{vmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) & \cos(x'z) \\ \cos(y'x) & \cos(y'y) & \cos(y'z) \\ \cos(z'x) & \cos(z'y) & \cos(z'z) \end{vmatrix}$$

und nennen diesen Ausdruck den Sinus der durch die Ebenen der $x'y'$, $y'z'$, $z'x'$ gebildeten Ecke, so ist bekanntlich das Volumen der Octaeder grössten Inhalts auch ausgedrückt durch:

$$V = \frac{4}{3} a'\, b'\, c'\, \sin(a'\, b'\, c')$$

und hieraus folgt:

$$\sin(a'\, b'\, c') = \frac{a\, b\, c}{a'\, b'\, c'}$$

Endlich haben die Cosinus der Winkel, welche die a', b', c' miteinander bilden, die Werthe:

$$\cos(b'\, c') = \frac{1}{b'\, c'} \left\{ a^2\, \alpha'\, \alpha'' + b^2\, \beta'\, \beta'' + c^2\, \gamma'\, \gamma'' \right\}$$

$$\cos(c'\, a') = \frac{1}{c'\, a'} \left\{ a^2\, \alpha\, \alpha'' + b^2\, \beta\, \beta'' + c^2\, \gamma\, \gamma'' \right\}$$

$$\cos(a'\, b') = \frac{1}{a'\, b'} \left\{ a^2\, \alpha\, \alpha' + b^2\, \beta\, \beta' + c^2\, \gamma\, \gamma' \right\}$$

Zu jedem dem Ellipsoid eingeschriebenen Octaeder grössten Inhalts gehört nun ein umschriebenes Parallelopiped, dessen sechs Seitenflächen das Ellipsoid in den Eckpunkten des Octaeders berühren, dessen constanter Inhalt

$$J' = 8\ a\ b\ c$$

ist, und dessen acht Ecken sich auf dem Ellipsoid

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$$

bewegen; und zwar sind die Berührungspunkte der sechs Seitenflächen dieser Parallelopipeda die Durchschnittspunkte der Diagonalen der sie begrenzenden Parallelogramme.

Ebenso ist die Enveloppe der Seitenflächen der Octaeder grössten Inhalts das Ellipsoid

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

und die Berührungspunkte sind die acht Ecken der in (2) eingeschriebenen Parallelopipeda grössten Inhalts und liegen zugleich in den Schwerpunkten der die Octaeder begrenzenden Dreiecke.

Gehe ich jetzt von den in die Kugel eingeschriebenen Würfeln aus, so erhält man die Eckpunkte der Parallelopipeda grössten Inhalts im Ellipsoid in folgender Weise ausgedrückt:

$$x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ a\ (\alpha + \alpha' + \alpha''); \quad y_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ b\ (\beta + \beta' + \beta''); \quad z_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ c\ (\gamma + \gamma' + \gamma'') \quad \text{u. s. w.}$$

Das constante Volumen der durch diese acht Punkte bestimmten Parallelopipeda beträgt:

$$V_1 = \frac{8}{9}\ a\ b\ c\ \sqrt{3}$$

Die Verbindungslinien der Durchschnittspunkte der Diagonalen je zweier gegenüberliegender Parallelogramme sind wieder die conjugirten Durchmesser des Ellipsoides. Vom Centrum bis zum Durchschnitt mit den Begrenzungsflächen der Parallelopipeda haben sie die Längen:

$$a'_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ a'; \quad b'_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ b'; \quad c'_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ c'$$

Ferner entspricht jedem eingeschriebenen Parallelopipedon grössten Inhalts ein dem Ellipsoid umschriebenes Octaeder, dessen sechs Ecken sich ebenfalls auf dem Ellipsoid (1) bewegen, und dessen constanter Inhalt

$$V'_1 = 4\ a\ b\ c\ \sqrt{3}$$

beträgt. Die Berührungspunkte sind die Schwerpunkte der begrenzenden Dreiecke.

Ebenso tangiren die Seitenflächen der Parallelopipeda grössten Inhalts das Ellipsoid (2) in den Eckpunkten der diesem eingeschriebenen Octaeder grössten Inhalts.

BERICHTIGUNG.

Auf Seite 35 muss die dritte, vierte und fünfte Zeile von unten heissen:

$$
\begin{aligned}
&(q_4 r_1 - q_1 r_4)\, f_1 + (r_4 p_1 - r_1 p_4)\, f'_1 + (p_4 q_1 - p_1 q_4)\, f''_1 + (q_4 r_2 - q_2 r_4)\, f_2 + (r_4 p_2 - r_2 p_4)\, f'_2 \\
&\quad + (p_4 q_2 - p_2 q_4)\, f''_2 + (q_4 r_3 - q_3 r_4)\, f_3 + (r_4 p_3 - r_3 p_4)\, f'_3 + (p_4 q_3 - p_3 q_4)\, f''_3 = 0 \\
&(q_3 r_1 - q_1 r_3)\, f_1 + (r_3 p_1 - r_1 p_3)\, f'_1 + (p_3 q_1 - p_1 q_3)\, f''_1 + (q_3 r_2 - q_2 r_3)\, f_2 + (r_3 p_2 - r_2 p_3)\, f'_2 \\
&\quad + (p_3 q_2 - p_2 q_3)\, f''_2 + (q_3 r_4 - q_4 r_3)\, f_4 + (r_3 p_4 - r_4 p_3)\, f'_4 + (p_3 q_4 - p_4 q_3)\, f''_4 = 0 \\
&(q_2 r_1 - q_1 r_2)\, f_1 + (r_2 p_1 - r_1 p_2)\, f'_1 + (p_2 q_1 - p_1 q_2)\, f''_1 + (q_2 r_3 - q_3 r_2)\, f_3 + (r_2 p_3 - r_3 p_2)\, f'_3 \\
&\quad + (p_2 q_3 - p_3 q_2)\, f''_3 + (q_2 r_4 - q_4 r_2)\, f_4 + (r_2 p_4 - r_4 p_2)\, f'_4 + (p_2 q_4 - p_4 q_2)\, f''_4 = 0
\end{aligned}
$$

P. Stankiewicz' Buchdruckerei, Berlin, Beuthstrasse 5.